Ulm University

Exercise Class:
27.04.2016 16:15
O28/2004

James Kennedy
Adrian Spener
Summer term 16

Nonlinear Partial Differential Equations Sheet 01

1. (i) Zeige, dass die Deltadistribution δ singulär ist. (i)

(ii) Es sei η ein Mollifier. Zeige (i)

$$\eta_\varepsilon \to \delta \ \ (\varepsilon \searrow 0) \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

2. (i) Zeige: ($2i$)

$$\lim_{r \searrow 0} r \left(\log \log \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right)^2 = 0.$$

(ii) Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die offene Kreisscheibe um 0 mit Radius 1. Zeige, dass ($3i$)

$$u(x) = \log \log \left(1 + \frac{1}{|x|} \right)$$

in $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ ist.
Vergleiche dieses Ergebnis mit dem Satz von Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.
Hinweis: Rate eine mögliche schwache Ableitung auf Ω. Verwende Polarkoordinaten und (i) für die Integrabilität von $|u|^2$ und $|Du|^2$. Wende den Integralsatz von Gauß auf $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$ an, um zu zeigen, dass der Kandidat tatsächlich die schwache Ableitung ist.

3. (i) Zeige, dass in einem topologischen Hausdorff-Raum X eine Folge x_n genau dann gegen ein $x \in X$ konvergiert, falls jede Teilfolge x_{n_k} eine Teilfolge $x_{n_{k_j}}$ besitzt, welche gegen x konvergiert. (i)

(ii) Zeige, dass die 'punktweise fast überall'-Konvergenz von Funktionenfolgen (z.B. auf $L^1(0,1)$) durch keine Hausdorfftopologie erzeugt werden kann. ($2i$)

4. (i) Es sei Y ein normierter Raum und $X \subset Y \times Y$ ein Unterraum. Zeige, dass gilt: $F \in X'$ genau dann, wenn $f_1, f_2 \in Y'$ existieren mit (i)

$$\langle F, (x_1, x_2) \rangle = \langle f_1, x_1 \rangle + \langle f_2, x_2 \rangle \text{ für alle } (x_1, x_2) \in X.$$

(ii) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeige, dass gilt: $F \in W^{-1,q}(\Omega)$ genau dann, wenn $f_0, f_1, \ldots, f_n \in L^q(\Omega)$ existieren mit ($2i$)

$$F = f_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega).$$