Ulm University

Exercise Class:
04.05.2016 16:15
O28/2004

James Kennedy
Adrian Spener
Summer term 16

Nonlinear Partial Differential Equations — Sheet 02

5. Es sei $d \geq 3$. Zeige, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit (4i)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Du|^2\,\mathrm{d}x$$

für alle $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$.
Hinweis: Zeige die Ungleichung zunächst für Testfunktionen. Integriere dazu das Produkt aus u^2 und div F für $F(x) = \frac{x}{|x|^2}$ partiell.
Verwende für die Approximierung die 'Umkehrung des Satzes von Lebesgue' und das Lemma von Fatou.

6. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $1 \leq p \leq \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(i) Zeige, dass $u^+ := \max\{0, u\}$ und $u^- := -(u)^+$ in $W^{1,p}(\Omega)$ sind, und fast überall gilt (3i)

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{auf } \{x \,|\, u(x) > 0\} \\ 0 & \text{auf } \{x \,|\, u(x) \leq 0\}, \end{cases} \qquad Du^- = \begin{cases} 0 & \text{auf } \{x \,|\, u(x) \geq 0\} \\ -Du & \text{auf } \{x \,|\, u(x) < 0\}. \end{cases}$$

Hinweis: Wende folgende **Kettenregel für Sobolevfunktionen** auf eine geeignete Approximation an:
Ist $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und F' auf $\mathbb{R}$ beschränkt, Ω beschränkt und $u \in W^{1,p}(\Omega)$ für ein $p \in [1, \infty]$, so ist

$$v := F(u) \in W^{1,p}(\Omega) \text{ mit } \frac{\partial v}{\partial x_i} = F'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

(ii) Zeige $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ und $Du = 0$ fast überall auf $\{x \in \Omega \,|\, u(x) = 0\}$. (2$i$)

7. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Der Graph $\{(x, u(x)) \,|\, x \in \Omega\}$ einer Abbildung $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ beschreibt eine d-dimensionale Hyperfläche im $\mathbb{R}^{d+1}$. Dessen d-dimensionaler Inhalt (Oberflächenmaß) ist gegeben durch

$$\mathcal{A}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,\mathrm{d}x.$$

(i) Zeige, dass $\mathcal{A}(u)$ wohldefiniert ist für alle $u \in H^1(\Omega)$ und bestimme $\delta\mathcal{A}(u)(\varphi)$ für $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. ($i$)

(ii) Zeige: Ist $u \in H^2(\Omega)$ ein Minimum von $\mathcal{A}$, so erfüllt u die Minimalflächengleichung (1). (i)

— bitte wenden —

8. (i) Es sei $\gamma > 1$. Zeige, dass die Poröse-Medien-Gleichung *(i)*

$$u_t = \Delta(u^\gamma)$$

eine quasilineare parabolische PDE ist und bestimme das Hauptsymbol.

(ii) Zeige, dass die Minimalflächengleichung *(i)*

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \tag{1}$$

eine quasilineare elliptische PDE ist und bestimme das Hauptsymbol.

(iii) Entscheide, für welche Werte von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, u, u_x, u_y die Gleichung *(i)*

$$u_{yy} + \sin(e^{|y|}u_x)u_x + x^2 u_{xx} + e^y \sinh(u_y u^3) = -u^2 - 2u_{xy}$$

elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch ist und bestimme das Hauptsymbol des korrespondierenden Differentialoperators.