Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 16/17

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 03

11. Bestimme, falls existent, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum folgender Mengen. Beweise deine Aussagen.

(i) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq x + 2\}$. (2)

(ii) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < x + 6\right\}$. (2)

(iii) $\left\{\frac{n-m}{n} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$. (2)

(iv) $\left\{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 2\right\}$. (2)

12. Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \text{ und } A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}.$$

Zeige oder widerlege:

(i) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. (2)

(ii) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$. (2)

13. Es sei $(K, +, \cdot, P)$ ein total angeordneter Körper und $A \subset K$, $A \neq \emptyset$. Zeige:

(i) Falls $\sup A$ existiert, so ist es eindeutig. (2)

(ii) $\max A$ existiert genau dann, wenn $\sup A$ existiert und es gilt: $\sup A \in A$. In diesem Fall ist $\max A = \sup A$. (2)

14. (i) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$. (1)

(ii) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 < 2^n$? Beweise deine Aussage. (2)

(iii) Zeige: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt (1)

$$(b - a) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = b^{n+1} - a^{n+1}.$$

15. Es sei $f \colon [0,1] \to [0,1]$ monoton wachsend, d.h. $\forall a, b \in [0,1]$ mit $a \leq b$ ist $f(a) \leq f(b)$. Außerdem sei $f(0) > 0$ und $f(1) < 1$. Zeige, dass f einen Fixpunkt $z \in (0,1)$ besitzt, d.h. es existiert ein $z \in (0,1)$ mit $f(z) = z$. (4*)

Hinweis: Definiere $M = \{x \in [0,1] : x \leq f(x)\}$ und betrachte $s = \sup M$. Zeige zunächst, dass gilt: $s \in [0,1]$ und $s \leq f(s)$. Zeige $f(s) \in M$, um damit die Behauptung zu folgern.