Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
**01.12.16, 14 Uhr**
**H22**

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 16/17

$20 + 4^*$ Punkte

# Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 06

**26.** (i) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$ ist $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le 2^{1-k}$. (1)

(ii) Zeige, dass für die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gilt: $2 \le a_n \le 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $a_n$ ist monoton wachsend. (2)

(iii) Zeige, dass die Folge $a_n$ aus (ii) gegen eine Zahl $e \in \mathbb{R}$ konvergiert, und dass für den Grenzwert $e$ gilt: $2 \le e \le 3$. (1)

**27.** Es sei $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Zeige, dass gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} p^{\frac{1}{n}} = 1$. (3)

**Hinweis:** Betrachte zunächst den Fall $p > 1$ und untersuche die Folge $a_n = p^{\frac{1}{n}} - 1$.

**28.** Bestimme, falls wohldefiniert, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für folgende reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(i) $a_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. (1)

(ii) $a_n = \dfrac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n}$. (2)

(iii) $a_n = n - 3\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor$. (2)

Hier bezeichnet für eine relle Zahl $x$ die ganze Zahl $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$ die untere Gauß-Klammer von $x$.

**29.** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter reeller Zahlen. Zeige, dass $a_n$ genau dann konvergiert, wenn gilt: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, und dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. (3)

**30.** Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte reelle Folgen. Zeige oder widerlege:

(i) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$. (1)

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \ge \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$. (1)

(iii) $\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \le (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$. (1)

(iv) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$. (1)

(v) $\limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)$. (1)

**31.** Es seien $0 < a < b$ reelle Zahlen. Wir definieren Folgen $(a_n)$, $(b_n)$ rekursiv wie folgt: $a_1 = a$, $b_1 = b$ und $a_{n+1} = G(a_n, b_n)$ sowie $b_{n+1} = A(a_n, b_n)$, wobei wir $G(x,y) = \sqrt{xy}$ und $A(x,y) = \frac{x+y}{2}$ definieren. Zeige, dass die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung bilden, und folgere, dass eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. (4*)