Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 16/17

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 08

39. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz: (12)

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{7k}}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} (\sqrt[k]{7} - 1)^k$.

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+i)^k}{k!}$.

(v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2}{k^4+1}$.

(vi) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+2}{k^3+1}$.

40. Zeige mit Hilfe des Cauchy-Produkts absolut konvergenter Reihen dass für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ gilt: (2)

$$\frac{q}{(1-q)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k.$$

41. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe (2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^m}{m^k}(z-i)^k,\ z \in \mathbb{C}.$$

42. (i) Wir zeigen die Dezimalbruchdarstellung:

(a) Beweise: Für jedes $x \in [0,1)$ gibt es Zahlen $a_k \in \{0,1,\dots,9\}$, $k \in \mathbb{N}$, so dass für $r_n = x - \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$ gilt: $10^n r_n \in [0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)

Anleitung: Wähle zunächst $a_1 \leq 10x < a_1 + 1$ und induktiv $a_k \in \{0,1,\dots,9\}$ so, dass gilt: $a_k \leq r_{k-1}10^k < a_k + 1$.

(b) Zeige die Dezimalbruchdarstellung (1)

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

für obige Wahl der a_k, also dass die Reihe konvergiert und ihr Wert gleich x ist.

(ii) Bestimme die Dezimalbruchdarstellung von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{41}{66}$. $(1+1^*)$

(iii) Zeige die Eindeutigkeit der Dezimalbruchdarstellung aus (i). (3^*)

Hinweis: Zeige zunächst, dass für diese Art der Dezimalbruchdarstellung stets $a_k \neq 9$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt.