UNIVERSITÄT ULM

Abgabe und Besprechung:

22.12.16, 14 Uhr

H22

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 16/17

$20+3^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 09

43. Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{k^k} z^k.$ (2)

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} k z^{2k}.$ (2)

44. Es sei die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ gegeben. Außerdem existiere ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft $a_k \neq 0$ für alle $k \geq N$, und es existiere (2)

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = a \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass für $a \neq 0$ die Reihe divergiert für $|z-z_0| > \frac{1}{a}$ und absolut konvergiert für $|z-z_0| < \frac{1}{a}$.
Zeige außerdem, dass im Fall $a = 0$ die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.
Bemerkung: Insbesondere stimmt also die Zahl $\frac{1}{a}$ mit der Definition des Konvergenzradius überein.

45. Schreibe die folgenden Funktionen als Potenzreihen mit dem Entwicklungspunkt 0 und bestimme die Konvergenzradien:

(i) $1 + z(z+1)(1+z^2).$ (1*)

(ii) $\dfrac{1}{1+z^2}.$ (1)

46. (i) Zeige die strikte Monotonie der reellen Exponentialfunktion, also (1)

$$\exp(x) < \exp(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x < y.$$

(ii) Zeige für $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) \geq 1 + x$. (2)
Hinweis: Aufgabe **48.**

— bitte wenden —

47. Es sei der *cosinus hyperbolicus* definiert durch

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Zeige:

(i) Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$. (2)

(ii) $\cosh(z) = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}$, $z \in \mathbb{C}$. (1)

(iii) $\cosh(iz) = \cos(z)$, $z \in \mathbb{C}$. (1)

48. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Zeige:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ ist $\left|1 - \binom{n}{k} \frac{k!}{n^k}\right| \leq \frac{k(k-1)}{n}$. (2)

Hinweis: Bernoullische Ungleichung.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist (2)

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \frac{|z|^2}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|z|^k}{k!}.$$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\left|\exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \frac{|z|^2}{n} \exp(|z|) + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right|$. (2*)

(iv) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$. (2)