Universität Ulm

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 16/17

Blatt 10: Probeklausur - Analysis I

- Erlaubte Hilfsmittel: ein zweiseitig von Hand beschriebenes DinA4-Blatt. Beachte: Taschenrechner nicht erlaubt!
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Insgesamt sind 100 + 5* Punkte zu erreichen.
- Das Blatt wird wie folgt bewertet: **Es dürfen 4 Aufgaben abgegeben werden, ein Viertel der erreichten Punkte werden als Bonuspunkte für die Vorleistung gewertet. Es ist ausdrücklich erlaubt, dass das Blatt *alleine* abgegeben wird.** Abgabe ist wie immer am Do., 12.01.2017 vor der Übung.

Viel Erfolg!

1. Bestimme, falls existent, Infimum, Minimum, Supremum und Maximum der folgenden Menge $M \subset \mathbb{R}$. Beweise deine Aussagen. (14)

$$M = \left\{ \frac{n+1}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

2. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive Funktion. Zeige, dass die Funktion (12)

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2 \cdot f(x) - 1$$

injektiv, surjektiv und bijektiv ist und bestimme die Umkehrfunktion von g.

3. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: (10)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}.$$

4. Bestimme alle Häufungspunkte und, sofern wohldefiniert, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der angegeben Folgen (a_n), $n \in \mathbb{N}$: (3×4+5)

(i) $a_n = \dfrac{2n - 6n^2 + n(-1)^n}{7n - 3n^2 + 1}$, $a_n \in \mathbb{R}$.

(ii) $a_n = \sqrt{n^2 + 2n + 1} - n$, $a_n \in \mathbb{R}$.

(iii) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$, $a_n \in \mathbb{R}$.

(iv) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i-1)^k$, $a_n \in \mathbb{C}$.

5. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz. Bestimme außerdem den Grenzwert **einer** konvergenten Reihe. (16+2)

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} 7(-2)^{k-1}5^{-k+2}$.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\right)^k$.

(iii) $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{4}{k^2 - k}$.

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} 5^{-k}$.

6. Die reelle Folge a_n sei rekursiv definiert durch $a_1 = 5$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(i) $a_{n+1}^2 = 5 + (a_{n+1} - a_n)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (6)

(ii) a_n ist nach unten durch $\sqrt{5}$ beschränkt und es ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (4)

(iii) Die Folge a_n ist konvergent. Bestimme außerdem den Grenzwert. (5)

7. Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen: (8)

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} k^3(z - 2i)^k$.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9^k}{\sqrt{k}} z^{2k}$.

8. Es seien (a_n) und (b_n) Folgen positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b > 0$ für ein $b \in \mathbb{R}$.

(i) Zeige, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $b_n > \frac{b}{2}$ für alle $n \geq n_0$. (5)

(ii) Zeige, dass die Folge $c_n = a_n \cdot b_n$, $n \in \mathbb{N}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. (5*)

Erholsame Feiertage und einen guten Rutsch!