Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
19.01.17, 14 Uhr
H22

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 16/17

20+3* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 11

Bemerkung: Löse Aufgaben **49. - 52.** ohne Verwendung der Stetigkeit.

49. Es sei $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2 - 2x + 3$. Zeige, dass f streng monoton wachsend ist, bestimme den Wertebereich $W(f) = f([1,\infty)) \subset \mathbb{R}$ und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W(f) \to [1,\infty)$. (2)

50. (i) Es sei $D = (-1,1) \subset \mathbb{R}$. Bestimme die Menge der Berührungspunkte von D. (1)

(ii) Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sqrt{(x-3)^2} - 2}{1 - x^2}$. Bestimme, sofern existent, $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x)$. (3)

51. Bestimme folgende Grenzwerte, sofern existent. Untersuche in Teil (v), ob die einseitigen Grenzwerte existieren. (5)

(i) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x(x-2)}$.

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$.

(iv) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$.

(v) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

52. Es sei $\alpha > 0$. Beweise: (2+1+1)

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\exp(x)}{x^\alpha} = \infty$.

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^\alpha \log(x) = 0$.

53. Es sei $D = [2, 13]$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

(i) Zeige, dass f auf D stetig ist. (1)

(ii) Bestimme zu jedem $a \in D$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ explizit, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ folgt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. (2)

54. (i) Es sei (a_k) eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Zeige, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert. (3*)

(ii) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\log(n))^\alpha}$? (2)