Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
02.02.17, 14 Uhr
H22

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 16/17

20+3* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 13

62. (i) Zeige: Es gibt genau ein $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ mit $\cos\varphi = \sin\varphi$. (1)

(ii) Verwende das Additionstheorem und die Definition von π um zu zeigen, dass gilt: $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\cos(\varphi) = \sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (1)

63. (i) Zeige **Satz 7.8 (b)**, ohne Kapitel 5 zu verwenden, also: Die Funktion $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. (2)

(ii) Zeige, dass $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ und dessen Umkehrfunktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ differenzierbar sind und es gilt: (2)

$$\tan(x)' = 1 + \tan^2(x), \ \arctan(y)' = \frac{1}{1+y^2}.$$

64. Bestimme die Ableitungen folgender Funktionen:

(i) $f(x) = \exp(\cos(x)) + \sqrt{1+\sin^2(x)} + \log(\tan(x)^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. (2)

(ii) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$, $x > 0$. (1)

(iii) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, $|x| < 1$. (3)

Es sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in (0,1]$. Dann heißt f **Hölder-stetig** mit dem Exponenten α, falls ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

Ist f Hölder-stetig mit Exponent $\alpha = 1$, so heißt f **Lipschitz-stetig**.

65. (i) Zeige, dass jede Hölder-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist. (1)

(ii) Es sei D ein nicht entartetes Intervall, $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und Lipschitz-stetig. Zeige, dass dann für alle $x \in D$ gilt: $|f'(x)| \leq C$. (1)

(iii) Ist $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ Lipschitz-stetig? (1)

(iv) Finde eine gleichmäßig stetige Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, die nicht Lipschitz-stetig ist. (1)

(v) Finde eine Lipschitz-stetige Funktion $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, die nicht differenzierbar auf $[-1,1]$ ist. (1)

(vi) Es sei $\beta \in (0,1]$. Für welche $\alpha \in (0,1]$ ist $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\beta$ Hölder-stetig mit Exponenten α? (3*)

66. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar auf I. Zeige, dass dann $f \cdot g\colon I \to \mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$ ebenfalls n-mal differenzierbar ist und es gilt: (3)

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$