Übungen zur Vorlesung Analysis I — Blatt 14

67. Zeige: $2\arctan x = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$. (2)
Hinweis: Verwende Aufgabe **64.**(iii).

68. Zeige die Umkehrung von Aufgabe **65.**(ii), also: (2)
Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gibt es ein $C \geq 0$, so dass für alle $x \in (a,b)$ gilt: $|f'(x)| \leq C$, dann ist f Lipschitz-stetig auf (a,b).

69. Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte: (6)

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ für $a \in \mathbb{R}$.

70. Bestimme und klassifiziere alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon [-1,4] \to \mathbb{R}$, (4)

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{8}{3}x^3 + 3x^2 + 5.$$

Bestimme, falls existent, $\max\limits_{x\in[-1,4]} f(x)$ und $\min\limits_{x\in[-1,4]} f(x)$ und skizziere den Graphen von f.

71. Zeige die verallgemeinerte Bernoullische Ungleichung $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ für alle $x > -1, \alpha \geq 1$. (3*)

72. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und f besitze eine Nullstelle $c \in (a,b)$ mit $f'(c) \neq 0$. Wir definieren $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

(i) Zeige, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass für $I = [c-\delta, c+\delta]$ gilt: (2)
  (a) $\Phi\colon I \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert,
  (b) $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $x \in I$.

(ii) Zeige $|\Phi(x) - c| \leq \delta$ für alle $x \in I$, also $\Phi(I) \subset I$ für I wie in Teil (i). (2)

(iii) Für einen Startwert $x_0 \in I$ sei die Folge x_n rekursiv definiert durch $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass x_n gegen c konvergiert. (2)

Hinweis: Zum Bestehen der Vorleistung sind 135 Punkte hinreichend.