Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
16.02.17, 14 Uhr
H22

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 16/17

16+8* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 15

73. Es sei $D = (0, \infty)$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log x$.

(i) Bestimme die Taylorreihe $T_a(f)(x)$ von f am Entwicklungspunkt $a = 1 \in D$. (2)
Hinweis: Zur Kontrolle: Es ist $f^{(n+1)}(1) = (-1)^n n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihe $T_1(f)$. (1)

(iii) Zeige, dass für alle $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ die Taylorreihe $T_1(f)(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert. (2)

74. Gib ein $n \in \mathbb{N}$ an, so dass die n-te Partialsumme $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ der Reihe (3)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

die Exponentialfunktion im Intervall $[-2, 2]$ mit einem maximalen Fehler von 10^{-1} approximiert.
Hinweis: Ein Taschenrechner darf ausnahmsweise als Hilfsmittel verwendet werden.

75. Es sei $D = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvex.

(i) Es sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ klein genug, so dass $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset D$ ist. Es sei $c = f(x_0)$, $c_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ und $c_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Zeige, dass für $0 \le t \le 1$ gilt: (1*)

$$(1+t)c - tc_2 \le f(x_0 - t\varepsilon) \le (1-t)c + tc_1,$$

Bemerkung: Analog lässt sich zeigen: $(1+t)c - tc_1 \le f(x_0 + t\varepsilon) \le (1-t)c + tc_2$.

(ii) Zeige, dass f stetig auf D ist. (2)

(iii) Zeige: Ist $g\colon D \to \mathbb{R}$ konkav, dann ist g stetig. (1*)

(iv) Finde eine konvexe Funktion $h\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, die nicht stetig ist. (2*)

76. Es sei $a > 0$ und $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$. Es sei für $n \in \mathbb{N}$ die äquidistante Zerlegung definiert durch $\mathcal{Z}_n = \{k \cdot \frac{a}{n}\colon k = 0, \ldots, n\}$.

(i) Bestimme die Unter- und Obersumme $\underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f)$ und $\overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f)$. (2)

(ii) Zeige $\overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) \to \frac{a^4}{4}$ und folgere $\underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) \to \frac{a^4}{4}$. (1)
Hinweis: Verwende **Aufgabe 14.**(i).

(iii) Folgere, dass gilt: $\displaystyle\int_0^a x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{a^4}{4}$. (1)

— bitte wenden —

77. Zeige $\int_a^b f(x+\lambda)\,\mathrm{d}x = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, falls das linke Integral existiert. (2)

Bemerkung: Analog kann man zeigen: $\int_a^b f(\mu x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|\mu|}\int_{\min\{\mu a,\mu b\}}^{\max\{\mu a,\mu b\}} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $\mu \neq 0$.

78. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch mit Periode $P > 0$ (d.h. $f(x+P) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$) und $f \in R([0,P])$ mit $J = \int_0^P f(x)\,\mathrm{d}x$. Zeige:

(i) $\int_\lambda^{P+\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x = J$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. (2*)

Hinweis: Ist λ kein ganzzahlig Vielfaches von P, so gibt es genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $nP \in [\lambda, \lambda + P]$.

(ii) Ist f eine gerade Funktion, so ist $\int_0^{\frac{P}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{J}{2}$. (1*)

(iii) Verwende $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ um zu folgern, dass gilt: (1*)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Hinweis: Zum Bestehen der Vorleistung sind 135 Punkte hinreichend.