Universität Ulm

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 16/17

Blatt 16: Probeklausur 2 - Analysis I

- Erlaubte Hilfsmittel: ein zweiseitig **von Hand** beschriebenes DinA4-Blatt. Beachte: Taschenrechner nicht erlaubt!
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Insgesamt sind $100 + 8^*$ Punkte zu erreichen.

Viel Erfolg!

1. Zeige mit dem ε-δ-Kriterium, dass die Funktion (12)

$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2-1}{4x+1}$$

im Punkt 1 stetig ist.

2. Zeige, dass die Funktion $f\colon [\frac{1}{2},\infty)$, $x \mapsto \dfrac{3}{x}$ gleichmäßig stetig ist. (7)

3. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ stetig. Zeige, dass f konstant ist. (8)

4. Zeige: $\log(1+2x) > \dfrac{2x}{1+2x}$ für alle $x > 0$. (8)

5. Bestimme, falls existent, den Grenzwert (8)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

für die Funktionen $f(x) = \sin(2x)$, $g(x) = 2\arctan(x)$.

6. (i) Zeige: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} \cdot \sin x = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (3)

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist. (5)

(b) Zeige, dass f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. (7)

7. Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\log x}{x}$.

(i) Bestimme f' und zeige $f''(x) = \frac{1}{x^3}(2\log(x) - 3)$, $x > 0$. (6)

(ii) Bestimme $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. (4)

(iii) Untersuche f auf lokale und globale Extrema. (4)

(iv) Bestimme alle Intervalle, auf denen f konvex bzw. konkav ist. (3)

(v) Skizziere den Graphen von f. (2)

8. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\exp(x)$.

(i) Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung $T_2^a f$ von f mit Entwicklungspunkt $a = 0$. (8)

(ii) Zeige, dass für $|x| \leq 1$ die Abschätzung (4)

$$|f(x) - T_2^0 f(x)| \leq \frac{2e}{3}$$

gilt.

9. Bestimme Zahlen $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, $d \in \mathbb{R}$ so dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (6+5)

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} d - \frac{1}{2}\cos(x + \frac{\pi}{2}), & x \leq 0, \\ \sqrt{c(x+1)}, & x > 0 \end{cases}$$

stetig und stetig differenzierbar ist. **Hinweis:** Bestimme zunächst c.
Für welche Wahl von $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, $d \in \mathbb{R}$ ist f integrierbar auf dem Intervall $[-3, 42]$?

10. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \gamma \in \mathbb{R}$. (8*)
Zeige, dass für jedes $b \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{a \to \infty}(f(a+b) - f(a)) = b\gamma$.