Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 01

0. (i) Melde dich im Moodle (`moodle.uni-ulm.de`) für diese Veranstaltung an.

(ii) Wähle bis Freitag 12:00 Uhr deine präferierten Tutorien aus.

(iii) Nimm folgende Information zur Kenntnis:
Zum Bestehen der Vorleistung ist das Erreichen von 50% der Summe aller Punkte auf den Übungsblättern hinreichend. Nur mit bestandener Vorleistung darf die Klausur mitschreiben werden.
Das Übungsblatt wird vor der Übung abgeben. Bitte alleine abgeben! Alle von dir getroffenen Aussagen müssen bewiesen werden.
Die mit einem * gekennzeichneten Aufgaben geben Bonuspunkte.

1. Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale. (10)

(i) $\displaystyle\int_{\frac{4}{3}}^{2} (3x-4)^5 \,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int x\tan(x^2)\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\displaystyle\int x^\alpha \log x \,\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

(iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \,\mathrm{d}x$,

(v) $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{2+3x-2x^2}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Zu (iii): Unterscheide die Fälle $\alpha = -1$ und $\alpha \neq -1$.

2. Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f beschränkt und integrierbar sowie $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, und g stetig. (4*)

(i) Zeige, dass ein $\xi \in [a,b]$ existiert mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Zeige, dass die Aussage aus Teil (i) richtig bleibt, wenn $f(x) \leq 0$ ist für alle $x \in [a,b]$. (1)

— bitte wenden —

3. Es sei I ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion.

(i) Es bezeichne $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ das Taylorpolynom vom Grad n von f an der Stelle x_0, und es sei $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ das Restglied. Zeige mit vollständiger Induktion über $k = 0, \ldots, n$, dass gilt: (5)

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Insbesondere gilt also für jedes $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Folgere aus Teil (i) und **2.**, dass ein $\xi \in [x, x_0]$ existiert mit (2)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Bemerkung: Diese Formel hatten wir bereits in der Veranstaltung Analysis I bewiesen.

4. Es seien I, J zwei Intervalle und $f\colon I \to J$ stetig, $g\colon J \to \mathbb{R}$ differenzierbar sowie $g(J) \subset I$. Sei $a \in I$ und die Funktion $H\colon J \to \mathbb{R}$ definiert durch (2)

$$H(x) = \int_{a}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in J.$$

Zeige, dass H auf J differenzierbar ist mit Ableitung $H'(x) = f(g(x))g'(x)$.