UNIVERSITÄT ULM

Abgabe und Besprechung:
03.05.17, 16 Uhr
H3

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 17

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 02

5. Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Existenz. (5+4*)

(i) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

(ii) $\displaystyle\int_{\pi^2}^{\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x.$

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

(iv) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

Hinweis zu (iv): Es ist $|\cos(x)| \geq \frac{1}{2}$ für alle $(k-\frac{1}{3})\pi \leq x \leq (k+\frac{1}{3})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Zeige oder widerlege: Ist $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und es existiert $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. (1)

7. Untersuche die folgenden Funktionenfolgen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. (5)

(i) $f_n(x) = \dfrac{nx+1}{n}.$ (ii) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x}.$ (iii) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}.$

8. Es sei $f_n\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 1 \leq x \leq n, \\ 0, & x > n. \end{cases}$

(i) Zeige, dass f_n gleichmäßig gegen $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [1,\infty)$ konvergiert. (1)

(ii) Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_1^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$? (1)

9. Es sei D eine Menge. Für Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\colon x \in D\}$.

(i) Zeige: $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, falls $\|f\|_\infty < \infty$. (1)

(ii) Es seien $f_n, f\colon D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeige, dass die Funktionenfolge f_n genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn gilt: $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$. (2)

(iii) Es sei $\ell^\infty(D;\mathbb{R})$ der Vektorraum der beschränkten Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$. Zeige, dass $\|\cdot\|_\infty\colon \ell^\infty(D;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine Norm ist, d.h. es gilt für alle $f, g \in \ell^\infty(D;\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$: (2)

(a) $0 \leq \|f\|_\infty < \infty$ und $0 = \|f\|_\infty$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in D$.

(b) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$.

(c) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

10. Entwickle die Funktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in eine Potenzreihe um 0. (2)