Universität Ulm
Abgabe ~~und Besprechung~~:
24.05.17, 16 Uhr
H3

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 17

$20 + 5^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 05

22. (i) Untersuche die Funktion (2)

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

(ii) Zeige für

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, aber nicht stetig in $(0,0)$. (2)

(b) Für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ (bzw. $y_0 \in \mathbb{R}$) sind die Funktionen $f(x_0,\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x_0,y)$ (bzw. $f(\cdot,y_0)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,y_0)$) stetig. (1)

23. Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ nicht leer. Für $x \in X$ sei

$$f_M(x) := \delta(x,M) := \inf_{y\in M} d(x,y)$$

der *Abstand* von x zu M. Zeige:

(i) $f_M(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in X$ und für jedes $x \in X$ existiert eine Folge (a_n) aus M mit $\lim_{n\to\infty} d(x,a_n) = f_M(x)$. (1)

(ii) Ist $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, dann hat die Folge aus Teil (i) eine konvergente Teilfolge. (1)

(iii) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, dann gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ein $y = y(x) \in M$ mit $f_M(x) = \|x-y\|$. (1)

(iv) Berechne f_M für $M = \overline{B}_1(0) \subset (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ und $M = \mathbb{R}\times\{0\} \subset (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. (2)

(v) Für allgemeines $X \subset M$ ist f_M ist Lipschitzstetig mit $L = 1$, d.h. für alle $x,z \in X$ ist $|f_M(x) - f_M(z)| \leq d(x,z)$. (2)

(vi) Das **Lemma von Urysohn**: Es seien $M_1, M_2 \subset X$ nichtleer, abgeschlossen und disjunkt, d.h. $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige Funktion $g\colon X \to \mathbb{R}$, für die gilt: $g(x) = 0$ für alle $x \in M_1$, $g(x) = 1$ für alle $x \in M_2$, und $0 < g(x) < 1$ für alle $x \notin M_1 \cup M_2$. (1+1*)

Hinweis: Betrachte $\dfrac{f_{M_1}}{f_{M_1} + f_{M_2}}$.

— bitte wenden —

24. Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume und $T\colon X \to Y$ linear.

(i) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (3)

(a) Es existiert eine Konstante $C \geq 0$ mit $\|Tx\|_Y \leq C$ für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$.

(b) Es existiert eine Konstante $C \geq 0$ mit $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$.

(c) T ist Lipschitzstetig.

(d) T ist gleichmäßig stetig.

(e) T ist stetig.

(f) T ist stetig in $0 \in X$.

(ii) Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Zeige, dass T stetig ist. (2)

(iii) Es sei $L(X,Y) = \{T\colon X \to Y \text{ linear und stetig}\}$, dann ist $L(X,Y)$ ein Vektorraum (mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation). (1)
Zeige, dass $L(X,Y)$ ein normierter Raum ist, wobei wir für $T \in L(X,Y)$ dessen *Operatornorm* wie folgt definieren:

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y.$$

(iv) Es sei $(Z, \|\cdot\|_Z)$ ein weiterer normierter Raum. Zeige: Für $T \in L(X,Y), S \in L(Y,Z)$ ist $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$. (1)

25. Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, Y vollständig, $D \subset X$ und $f\colon D \to Y$ gleichmäßig stetig. Zeige: Es existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $\overline{f}\colon \overline{D} \to Y$, d.h. eine stetige Funktion $\overline{f}\colon \overline{D} \to Y$ mit $\overline{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in D$. (4*)

Beachte: Abgabe ist am Mi., 24.05. um 16 Uhr vor der Vorlesung, Besprechung am Di., 30.05.