# Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
**07.06.17, 16 Uhr**
**H3**

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 17

$18 + 6^*$ Punkte

## Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 07

**32.** Untersuche folgende Funktionen auf partielle Differenzierbarkeit und gib, falls existent, die Jacobimatrix und Jacobideterminante an.

(i) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (e^x \sin(2xy), y \arctan(x))$. (2)

(ii) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \displaystyle\int_0^y \cos(t^2 x)\,\mathrm{d}t$. (2)

(iii) $f\colon (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$, $(r,\vartheta,\varphi) \mapsto r(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$. (2)

(iv) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f(x) = Ax + b$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. (1)

(v) $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\|x\|_2)^{2-n}$, $n \geq 3$. Berechne die Spur der Hessematrix von $f$. (1+2*)

(vi) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\|Ax - b\|_2)^2$ für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Bestimme auch die Hessematrix von $f$. (2)

**33.** Zeige, dass (3)

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

überall in jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\|_2 = 1$ differenzierbar ist und bestimme $\frac{\partial}{\partial v} f(0,0)$. Ist $f$ im Ursprung total differenzierbar?

**34.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (4)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeige, dass $f$ auf $\mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar ist, und es gilt $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$.

**35.** (i) Es sei $(X,d)$ ein kompakter metrischer Raum und $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise monoton fällt, d.h. $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ für alle $x \in X$. Ferner konvergiere $f_n$ punktweise gegen eine stetige Grenzfunktion $f\colon X \to \mathbb{R}$. Zeige, dass $f_n$ gleichmäßig konvergent ist. (4*)

**Hinweis:** Betrachte für jedes $\varepsilon > 0$ die Mengen $U_n = \{x \in X \mid f_n(x) - f(x) < \varepsilon\} \subset X$.

(ii) Zeige, dass die Aussage aus Teil (i) falsch ist, wenn die Grenzfunktion $f$ nicht stetig ist. (1)