UNIVERSITÄT ULM

Abgabe und Besprechung:
14.06.17, 16 Uhr
H3

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 17

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 08

36. Zeige oder widerlege: Zu den gegebenen Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $DF(x,y) = f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) $f(x,y) = (y, xy)$, (1)

(ii) $f(x,y) = (y + 2x + e^y, x + xe^y)$. (2)

37. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$.

(i) Zeige, dass f total differenzierbar ist und bestimme die Ableitung von f. (1)

(ii) Berechne die Richtungsableitung von f an der Stelle $a = (1,1)$ in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ sowie in Richtung von $w = \frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|_2}$ und $-w$. (1)

(iii) Skizziere den Graphen von f sowie $(v,0)$, $(w,0)$ und $(-w,0)$ an die Stelle $(a, f(a))$. (1)

38. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeige:

(i) f ist total differenzerbar auf $\mathbb{R}^2$. (3)

(ii) f' ist nicht stetig in $(0,0)$. (2)

39. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar auf U und $g = \nabla f$ der Gradient von f. Zeige: Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathrm{U}$ eine stetig differenzierbare Kurve in U, dann ist (2)

$$\int_a^b \langle g(\gamma(t)), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\rangle_2 \,\mathrm{d}t = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

40. Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar und $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit $f(\gamma(t)) = c$ für alle $t \in \mathbb{R}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Gradient von f an der Stelle $\gamma(t)$ orthogonal zum Vektor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)$ ist. (2)

— bitte wenden —

41. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset U$ kompakt und konvex und $f \in \mathcal{C}^1(U; \mathbb{R})$. Zeige, dass f auf K Lipschitzstetig ist, also eine Konstante $L \geq 0$ existiert mit (4)

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$$

für alle $x, y \in K$.

42. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Zeige:

(i) $Df(0, 0) = 0$. (1)

(ii) Es gibt Folgen $(x_n, y_n) \to (0, 0)$, $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \to (0, 0)$ mit $f(x_n, y_n) > 0$ und $f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2*)

(iii) Für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ hat die reelle Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(tv)$ ein lokales Minimum in $t = 0$. (2*)