Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
21.06.17, 16 Uhr
H3

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 17

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 09

43. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 1 + x^3 + y^3 - 3xy$.

(i) Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f an den Stellen $a = (0,0)$ und $b = (1,1)$. (3)

(ii) Bestimme die Nullstellen von ∇f und entscheide, sofern möglich, ob es sich jeweils um ein lokales Extremum oder einen Sattelpunkt handelt. (3)

44. Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto e^z \sin x \cos y$.

(i) Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f an der Stelle $a = (0,0,0)$. (2)

(ii) Bestimme ein $r > 0$, so dass für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|(x,y,z)\|_2 < r$ gilt: (2)

$$|f(x,y,z) - T_1(x,y,z)| \leq \frac{1}{10}.$$

Bemerkung: Ausnahmsweise darf hierzu ein Taschenrechner verwendet werden.

45. Es sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2 + 2x^2 + y^2$. (4)
Bestimme, sofern existent, alle lokalen und globalen Extrema von f.

46. (i) Es seien $n \leq m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rang} A = n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Bestimme das globale Minimum von $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|Ax - b\|_2^2$. (2)

(ii) Es sei $c \in \mathbb{R}^m$. Folgere aus dem ersten Teil, dass $\overline{c} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^m c_i$ das globale Minimum von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^m (x - c_i)^2$ ist. (2)

47. Ein Teilmenge U eines metrischen Raumes (X, d_x) heißt **zusammenhängend**, wenn für jede Wahl von offenen Mengen $O_1, O_2 \subset X$ mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ und $U \subset O_1 \cup O_2$ gilt: $O_1 \cap U = \emptyset$ oder $O_2 \cap U = \emptyset$. Zeige:

(i) Sind (X, d_x) und (Y, d_Y) metrische Räume, $U \subset X$ zusammenhängend und $f\colon X \to Y$ stetig, dann ist $f(U)$ zusammenhängend. (4*)

(ii) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ist nicht zusammenhängend. (2)