Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 10

48. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es sei $\|A\| < 1$ für eine induzierte Norm $\|\cdot\|$. Zeige: Es existiert genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = Ax + b$. (2)

49. (i) Es sei $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ und $M = [1,\infty)$. Zeige, dass $f\colon M \to M$ wohldefiniert ist, $M \subset (0,\infty)$ (bezüglich des Betrags) eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ist, und für alle $x \neq y$, $x, y \in M$ gilt (3)

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

aber f keinen Fixpunkt auf $[1,\infty)$ besitzt.

(ii) Es sei (M, d) ein kompakter, nichtleerer metrischer Raum und $\Phi\colon M \to M$ mit (3)

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) < d(x, y) \text{ für alle } x, y \in M, x \neq y.$$

Zeige, dass Φ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

50. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (e^u \cos v, e^u \sin v)$.

(i) Bestimme $Df(u, v)$ und zeige, dass $Df(u, v)$ für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ invertierbar ist. Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv? (2)

(ii) Es sei $U = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$. Zeige, dass $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist, bestimme $f(U)$ und die inverse Funktion $f^{-1}\colon f(U) \to U$ sowie deren Ableitung $D(f^{-1})(x, y)$ für alle $(x, y) \in f(U)$. (3)

51. Zeige, dass sich die Gleichung $y^2 + xz + z^2 - e^{xz} = 1$ in einer Umgebung von $(0, -1, 1)$ in der Form $z = g(x, y)$ eindeutig auflösbar ist. Bestimme die Taylorentwicklung von g um den Punkt $(0, -1)$ bis zu den Gliedern erster Ordnung. (3)

52. Betrachte die implizit gegebene Kurve $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^3 - x^4y^5 = 1\}$.

(i) Zeige, dass $(1, 1)$ in K liegt. Untersuche, ob lokale Auflösungen $x(y)$ bzw. $y(x)$ um diesen Punkt nach y bzw. nach x möglich sind, und berechne gegebenenfalls $y'(1)$ und $x'(1)$. (3)

(ii) Bestimme die Taylorentwicklung von $x(y)$ um den Punkt 1 bis zur Ordnung 2. (2^*)

(iii) Führe die selbe Untersuchung auf lokale Auflösbarkeit wie in (i) um den Punkt $(-1, 0) \in K$ durch. ($1+2^*$)