Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
05.07.17, 16 Uhr
H3

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 17

$18 + 6^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II — Blatt 11

Erinnerung: Nächsten Dienstag, den 4.7. findet das Fußballspiel der Fakultät gegen die Zweitsemester statt. Anpfiff ist um 16:30 Uhr, im Anschluss wird hinter der Helmholtzstraße 18 gegrillt.

53. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy + 1$.

(i) Bestimme die Ableitung und die Hessematrix von f, sofern existent. (1)

(ii) Untersuche f auf lokale Extrema. (2)

(iii) Bestimme, sofern existent, $\min\limits_M f$ und $\max\limits_M f$ für $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 \leq 6\}$. (3)

54. Bestimme, sofern existent, $\min\limits_M f$ und $\max\limits_M f$ folgender Funktionen f auf M:

(i) $f(x,y) = xy$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. (2)

(ii) ~~$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 5$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.~~ (2*)

(iii) $f(x,y,z) = 5x + y - 3z$, $M = E \cap \mathbb{S}^2$, wobei gilt: (3)

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}, \qquad \mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\|_2^2 = 1\}.$$

55. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion $R\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^T A x$ unter der Nebenbedingung $(\|x\|_2)^2 = 1$. (3)
Was ist $\sup\{R(x) \mid \|x\|_2 = 1\}$ und $\inf\{R(x) \mid \|x\|_2 = 1\}$?

56. Bestimme den Euklidischen Abstand der Ebene $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 2z = 3\}$ zum Ursprung, also $\min\{\|(x,y,z)\|_2 : (x,y,z) \in E\}$. (2)

57. Es sei $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ und es sei x_0 eine einfache reelle Nullstelle des normierten Polynoms

$$P_a(x) := x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,$$

also $P_a(x_0) = 0$ und $P_a'(x_0) \neq 0$. Zeige:

(i) Einfache Nullstellen von Polynomen hängen lokal glatt von den Koeffizienten ab, genauer: (4*)
Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige glatte Funktion $\varphi : B_\varepsilon(a) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) = x_0$, so dass für alle $b = (b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ mit $|a_i - b_i| < \varepsilon \; \forall i \in \{0, \dots, n\}$ eine einfache Nullstelle x_1 von $P_b(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ gegeben ist durch $x_1 = \varphi(b)$.

(ii) Besitzt P_a n verschiedene reelle Nullstellen, so haben alle Polynome P_b genau n verschiedene reelle Nullstellen für b genügend nahe bei a. (1)