Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
12.07.17, 16 Uhr
H3

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 17

20+4* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 12

58. **Bemerkung:** In dieser Aufgabe dürfen Satz 4.6 (i) - (iv) verwendet werden.

(i) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $|M| = 0$. Sei $f \in R(M)$. Zeige: (1)

$$\int_M f \,\mathrm{d}x = 0.$$

(ii) Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Zeige, dass $M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2$ Jordan-messbar sind. (1)

(iii) Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Zeige, dass für alle $f \in R(M_1) \cap R(M_2)$ gilt: $f \in R(M_1 \cup M_2) \cap R(M_1 \cap M_2)$ mit (3)

$$\int_{M_1 \cup M_2} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{M_1} f(x) \,\mathrm{d}x + \int_{M_2} f(x) \,\mathrm{d}x - \int_{M_1 \cap M_2} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

(iv) Zeige: Sind $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, dann ist $M_1 \setminus M_2$ Jordan-messbar. (1)

(v) Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $M_1 \subset M_2$ und $f \in R(M_2)$. Zeige, dass $f \in R(M_1)$ ist und für $f \geq 0$ gilt (1)

$$\int_{M_1} f(x) \,\mathrm{d}x \leq \int_{M_2} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

59. Bestimme, sofern existent, die beiden Integrale (3)

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Ist $f \colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ integrierbar?

60. (i) Bestimme für $h > 0$ das Volumen des Kegels (2)

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

(ii) Es sei $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bestimme (2)

$$\int_Z z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z.$$

— bitte wenden —

61. Es sei $r > 0$ und $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, (x+r)^2 + y^2 \geq 2r^2\}$.

(i) Skizziere M. (1)

(ii) Zeige, dass M Jordan-messbar ist und bestimme $|M|$. (3)

62. Es seien $a, b > 0$. Bestimme $|M|$ für (2)

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\}.$$

63. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Zeige oder widerlege:

(i) Ist $A^\circ = \emptyset$, dann ist A eine Lebesguesche Nullmenge. (2*)

(ii) Ist $A^\circ \neq \emptyset$, dann ist A keine Lebesguesche Nullmenge. (2*)