Analysis für Informatiker

Delio Mugnolo

delio.mugnolo@uni-ulm.de

(Version von 20. Oktober 2008)

Dies ist das Skript zur Vorlesung *Analysis für Informatiker*, welche ich im Sommersemester 2008 an der Universität Ulm gehalten habe. Die Aufgaben und ihre Lösungshinweise im Kapitel 12 stammen dagegen meistens vom Assistent und Übungsleiter der Vorlesung, Herrn Moritz Gerlach.

Es ist durchaus möglich, dass ich im Text Fehler vergessen habe. Ich werde jedem/jeder dankbar sein, der/die mich darauf hinweisen wird – am besten direkt an `delio.mugnolo@uni-ulm.de`.

Ulm, den 20. Oktober 2008 Delio Mugnolo

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Mengenlehre

In der Mathematik betrachtet man nur Aussagen, die “entscheidbar” sind, also von denen es möglich ist zu sagen, ob sie “wahr” sind, oder “falsch”; z.B. die Aussagen “1+1=2” und “Mehr als 30.000 Studenten sind an der Universität Ulm immatrikuliert” sind beides entscheidbare Aussagen (und insbesondere ist die erste wahr und die zweite falsch), während die Aussage “Mein Hund ist intelligenter als deine Katze” nicht entscheidbar ist. Wohlgemerkt, eine entscheidbare Aussage braucht nicht *leicht* entscheidbar zu sein: z.B. die Aussage “$2^{32582657}-1$ ist eine Primzahl”.

In dieser Vorlesung setzen wir die Grundlagen der Logik, insbesondere die Begriffe von *Aussage*, *Implikation*, *Wahrheit* voraus. Für eine ausführlichere Einführung verweisen wir auf Lehrbücher, etwa [**3**, Kapitel 2], aber eine intuitive Vorstellung dieser Begriffe wird ausreichen. Übrigens, $2^{32582657}-1$ ist tatsächlich eine Primzahl, wie es 2006 bewiesen wurde.

Die Folgende Definition gilt als Startpunkt der moderner Mengenlehre. Wir werden sie *verbatim* zitieren und wortlich akzeptieren, trotz ihrer (nur scheinbaren!) Ungenauigkeit. Sie wurde von Georg Cantor 1895 vorgeschlagen.

Definition 1.1. *Unter einer* ***Menge*** *verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die* ***Elemente*** *von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Wenn ein Objekt x zu einer Menge M gehört schreibt man $x \in M$. Besteht M aus den Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so schreibt man $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (oder manchmal $M := \{x_1, \ldots, x_n\}$, wenn wir die Menge M gerade definieren). Wohlgemerkt: eine Menge darf auch unendlich viele Elemente enthalten. Nach Definition sind alle Elemente einer Menge notwendigerweise paarweise unterschiedlich.

Beispiel 1.2. Also bildet z.B. $\{1\}$ eine Menge (die nur aus 1 besteht), aber $\{1, 1\}$ nicht. Ähnlich ist $\{\text{Berlin}\}$ eine Menge, doch ist $\{\text{Berlin}, \text{Hauptstadt von Deutschland, Stuttgart}\}$ keine Menge. □

Sind zwei Objekte x, y *wohlunterscheidbar*, so kann man die Begriffe von Gleichheit und Ungleichheit von x, y als wohldefiniert voraussetzen. In diesem Fall schreibt man $x = y$ bzw. $x \neq y$. Zwei Mengen M, N heißen gleich (und man schreibt $M = N$) falls sie die selben Elemente enthalten, d.h.: Ist $m \in M$, so ist $m \in N$, und umgekehrt ist $m \in N$, so ist $m \in M$.

Definition 1.3. *Die Anzahl der Elementen einer Menge M heißt Kardinalität von M und wird oft mit $|M|$ bezeichnet.*

Beispiel 1.4. Man kann die Menge S aller StudentInnen der Universität Ulm betrachten. Jeder, der an diese Vorlesung teilnimmt, ist Element dieser Menge. Betrachtet man die Menge T derjenigen, die an der Universität Ulm immatrikuliert sind, so ist $S = T$. Im Wintersemester 2007/08 war $|S| = 6.842$. □

Mit der obigen Definition 1.1 sollte man vorsichtig umgehen. Bereits 1901 hat der Mathematiker, Philosoph und Nobelpreisträger Bertrand Russell gemerkt, dass eine naive Anwendung der Definition zu Paradoxa führen kann, etwa dem folgenden

Satz 1.5 (Russelsche Antinomie). *Es gibt keine Menge R aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten.*

Beweis. Angenommen R enthält sich selbst, dann gilt aufgrund der Eigenschaft, mit der R definiert wurde, dass R sich nicht enthält, was der Annahme widerspricht. Angenommen es gilt das Gegenteil und R enthält sich nicht selbst, dann erfüllt R die Eigenschaft, sodass R sich doch selbst enthält entgegen der Annahme. □

Wir wollen auf eine axiomatische Einführung der Mengenlehre verzichten. Als Faustregel merken wir nur an, dass sich solche Paradoxa doch vermeiden lassen, wenn man bei der Einführung einer Menge R durch eine Eigenschaft immer präzisiert, aus welcher sonst (wohl!) definierten Menge die Elemente R ausgewählt werden dürfen und die möglicherweise eine oder mehrere Bedingungen erfüllen, etwa

$$\{x \in M : \text{ die Bedingung } A \text{ wird von } x \text{ erfüllt}\}.$$

Definition 1.6. *Sei M eine Menge. Eine weitere Menge N heißt* ***Teilmenge*** *von M, falls jedes Element $n \in N$ auch Element von M ist.*

Ist N eine Teilmenge von M, so schreibt man $N \subset M$ (oder manchmal auch $M \supset N$). Man sieht leicht, dass die Mengen M, N genau dann gleich sind, wenn $M \subset N$ und auch $N \subset M$. Insbesondere ist jede Menge Teilmenge von sich selbst.

Beispiel 1.7. Die Menge I der Informatikstudenten ist eine Teilmenge der Menge S aus dem Beispiel 1.4. □

Definition 1.8. *Die Menge, die keine Elemente hat, heißt* ***leere Menge*** *und wird durch $\emptyset$ bezeichnet.*

Wohlgemerkt: die leere Menge $\emptyset$ ist eine wohl definierte Menge. Die Implikation "aus der Gültigkeit der Aussage A folgt die Gültigkeit der Aussage B" ist wahr, falls die Aussage A schon falsch ist. Insbesondere ist jede Implikation von der Form "aus $x \in \emptyset$ folgt $x \in M$", denn *kein* Objekt ist Element von $\emptyset$. Also gilt der folgende

Satz 1.9. *Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.*

Definition 1.10. *Sei M eine Menge. Die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen N von M heißt* ***Potenzmenge*** *von M.*

Der Name "Potenzmenge" folgt aus der Tatsache, dass die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen Kardinalität 2^n hat, s. Übungsaufgabe 4.15.

Beispiel 1.11. Sei M die Menge der Buchstaben a, b, also $M = \{\text{a,b}\}$. Dann ist $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, d.h. $|M| = 2$ und $|\mathcal{P}(M)| = 2^2$. □

Beispiel 1.12. Sei A das Alphabet, also

$$A = \{\text{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z,ä,ö,ü,ß}\}.$$

Beobachte, dass $\{\text{h,u,n,d}\}, \{\text{k,a,t,z,e}\} \in \mathcal{P}(A)$, und $\{\text{h,u,n,d}\} \neq \{\text{k,a,t,z,e}\}$. Doch bildet $\mathcal{P}(A)$ *nicht* das Wörterbuch: einerseits folgt aus der Definition von Menge, dass $\{\text{h,u,n,d}\} = \{\text{n,u,d,h}\}$, und allgemeiner stimmt jedes "Wort" (d.h. jede Teilmenge von A) mit seinen Anagrammen überein; andererseits gehören nicht alle üblichen Worte zu $\mathcal{P}(A)$, denn z.B. bildet $\{\text{u,n,i,v,e,r,s,i,t,ä,t}\}$ (und i.A. jedes Wort, in dem mindestens eine Buchstabe mehrmals vorkommt) keine Menge, vgl. Beispiel 1.2. □

Man kann verschiedene Mengenoperationen definieren.

Definition 1.13. *Seien M, N zwei Mengen. So definiert man die folgenden Mengen:*

- *der* ***Durchschnitt*** *$M \cap N$ ist die Menge der Elementen, die sowohl in M als auch in N enthalten sind, also $x \in M \cap N$ genau dann, wenn $x \in M$ und $x \in N$; ist $M \cap N = \emptyset$, so heißen M, N* ***disjunkt****;*
- *die* ***Differenzmenge*** *$M \setminus N$ ist die Menge der Elementen von M, die keine Elemente von N sind, also $x \in M \setminus N$ genau dann, wenn $x \in M$ und $x \notin N$; ist $N \subset M$, so heißt die Differenzmenge $M \setminus N$ auch* ***Komplement*** *von N in M, und wird mit N^C bezeichnet;*
- *die* ***Vereinigung*** *$M \cup N$ ist die Menge der Elementen von M, die auch Elemente von N sind, also $x \in M \cup N$ genau dann, wenn $x \in M$ oder $x \in N$;*

- *die **symmetrische Differenz** $M\Delta N$ von M und N ist die Menge der Elementen von M, die keine Elemente von N sind, und der Elementen von N, die keine Elemente von M sind, also $x \in M\Delta N$ genau dann, wenn entweder $x \in M$ oder $x \in N$.*

Anmerkung 1.14. Insbesondere gilt für alle Mengen M, N

$$M \cap N \subset M \subset M \cup N \qquad \text{sowie} \qquad M \cap N \subset N \subset M \cup N$$

und

$$M \setminus N \subset M\Delta N \subset M \cup N \qquad \text{sowie} \qquad N \setminus M \subset M\Delta N \subset M \cup N.$$

Elementare Rechenregel für Mengenoperationen lassen sich leicht beweisen.

Satz 1.15. *Seien M, N, P Mengen. Dann gelten die Mengengleichungen*

(1) $M \cap \emptyset = \emptyset$,
(2) $M \cup \emptyset = M$,
(3) $M \setminus \emptyset = M$,
(4) $M \cup N = N \cup M$,
(5) $M \cap N = N \cap M$,
(6) $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$,
(7) $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$,
(8) $(M \cap N) \cup P = (M \cup P) \cap (N \cup P)$,
(9) $(M \cup N) \cap P = (M \cap P) \cup (N \cap P)$,

Beweis. (1) $M \cap \emptyset$ ist nach Definition die Menge der Elementen, die M *und* $\emptyset$ gehören. Da $\emptyset$ keine Elemente hat, hat $M \cap \emptyset$ ebenfalls keine Elemente.
(4) Sei $x \in M \cup N$: nach Definition gehört x der Menge M oder der Menge N, und somit ist x auch Element von $N \cup M$.
(8) Ist $x \in (M \cap N) \cup P$, so ist x Element von P oder von $M \cap N$, d.h. von M *und* N. Ist $x \in P$, so ist x nach Anmerkung 1.14 auch Element von $M \cup P$ sowie von $N \cup P$, und somit von $(M \cup P) \cap (N \cup P)$. Ist jedoch $x \in M \cap N$, so ist $x \in M \subset M \cup P$ und auch $x \in N \subset N \cup P$. Damit hat man die Inklusion $(M \cap N) \cup P \subset (M \cup P) \cap (N \cup P)$ bewiesen. Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, sei $x \in (M \cup P) \cap (N \cup P)$. Dann ist x Element sowohl von $M \cup P$ als auch von $N \cup P$. Also ist x Element von M oder P und auch von N oder P. Ist x Element von P, so ist auch $x \in (M \cap N) \cup P$; ist jedoch $x \notin P$ so muss x Element von M (damit $x \in M \cup P$) und auch von N (damit $x \in N \cup P$) ist. Also ist $x \in M \cap N \subset (M \cap N) \cup P$. □

Satz 1.16. *Sind M, N beide Teilmengen der Menge P sind, so*

- *es gilt genau dann $M \subset N$, wenn $N^C \subset M^C$,*
- $M \setminus N = M \cap N^C$,
- $(M \cup N)^C = M^C \cap N^C$,
- $(M \cap N)^C = M^C \cup N^C$.

Übungsaufgabe 1.17. Vollende den Beweis vom Satz 1.15.

Übungsaufgabe 1.18. Führe den Beweis vom Satz 1.16 durch.

Man kann leicht das Darstellungsproblem im Beispiel 1.12 beheben. Etwas salopp definiert man als **geordnetes Paar** eine Sammlung (x, y) zweier nicht notwendig voneinander verschiedener Objekte x, y, wobei eines der beiden ausgezeichnet ist (eine genauere Definition, die auf Mengenlehre beruht, hat Norbert Wiener vorgeschlagen). Das ausgezeichnete Objekt x wird oft **vordere** (oder **erste**) **Komponente**, das andere y **hintere** (oder **zweite**) **Komponente** des geordneten Paars genannt. Z.B. bilden $(7, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 1)$ geordnete Paare (die alle unterschiedlich sind). Allgemeiner führt man ein:

Definition 1.19. *Ein n-**Tupel** ist eine Sammlung von n nicht notwendig voneinander verschiedener Objekte, wobei die Reihenfolge der Angaben berücksichtigt werden soll, etwa $(x_1, \dots, x_n)$, wobei x_i der i-te **Eintrag** (oder die i-te **Koordinate**) des Tupels heißt.*

Sind M, N Mengen, so kann man die Menge aller geordneten Paare (x, y) definieren, sodass $x \in M$ und $y \in N$. Eine Solche Menge heißt **kartesische Produkt** von M und N und wird durch $M \times N$ bezeichnet. Wohlgemerkt: $M \times N \neq N \times M$!

Beispiel 1.20. Sind $M = \{1, 2\}$ und $N = \{$Ingenieurwissenschaften und Informatik,Naturwissen-schaften,Medizin,Mather und Wirtschaftswissenschaften$\}$ die Menge der Fakultäten der Universität Ulm, so sind z.B.

$$(\text{Naturwissenschaften}, 2) \in N \times M \qquad \text{und} \qquad (2, \text{Medizin}) \in M \times N.$$

□

Allgemeiner führt man die folgende Definition ein.

Definition 1.21. *Das **kartesische Produkt** $M_1 \times \dots M_n$ (oder $\prod_{i=1}^n M_i$) der Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$ ist die Menge aller n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$, sodass der i-te Eintrag x_i Element von M_i ist. Sind $M_1 = \dots = M_n$, so bezeichnet man oft ihr kartesische Produkt durch M^n.*

Beispiel 1.22. Betrachte die Menge A aus dem Beispiel 1.12. Wir haben gesehen, dass die Teilmengen {h,u,n,d} und {n,u,h,d} übereinstimmen. Doch sind die tupel (h,u,n,d), (n,u,h,d) $\in A^4$ unterschiedlich, und (u,n,i,v,e,r,s,i,t,ä,t) $\in A^{11}$ ist als tupel wohldefiniert. □

Definition 1.23. *Seien M eine Menge. Jede Teilmenge $R \subset M \times M$ heißt **Relation** auf M, und man schreibt xRy, falls $(x, y) \in R$.*

Beispiel 1.24. Seien V eine Menge und E eine Relation auf V. Dann heißt das geordnete Paar (V, E) ein **Graph**. Die Elemente von V heißen üblicherweise **Knoten**, die Elemente von E heißen **Kanten**. Der Begriff von Graph ist sehr wichtig in der Mathematik sowie in der Informatik und wird in der *Graphentheorie* untersucht. □

Definition 1.25. *Eine Relation R heißt **Äquivalenzrelation**, falls für alle $x, y, z \in M$*

- *xRx (R reflexiv),*
- *xRy genau dann, wenn yRx (R symmetrisch),*
- *xRy und yRz impliziert xRz (R transitiv).*

*Dann heißt die Menge $[x] := \{y \in M : xRy\}$ **Äquivalenzklasse** von x. Jedes Element der Äquivalenzklasse $[x]$ heißt **Repräsentant** oder **Vertreter** von $[x]$; zwei Elemente einer Äquivalenzklasse heißen **äquivalent**. Die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. R heißt **Quotientenmenge** bzgl. R.*

Die Definition formalisiert die Idee, dass zwei unterschiedliche Elemente einer Menge für bestimmte Zwecke als gleichwertig angesehen werden können.

Jedes Element von M ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten. Die Äquivalenzklassen zu zwei Elementen $x, y \in M$ sind entweder gleich oder disjunkt, jenachdem, ob x, y äquivalent sind oder nicht.

Beispiel 1.26. Sei M eine Menge und $R_1 := \{(x, y) \in M \times M : x = y\}$. Dann ist R_1 eine Äquivalenzrelation, und es gilt genau dann xR_1y, wenn $x = y$, also gilt $[x] = \{x\}$. Darüber hinaus ist $R_2 := M \times M$ auch Äquivalenzrelationen: es gibt offensichtlich genau eine Äquivalenzklasse ($M \times M$ selber) bzgl. R_2. Wir merken auch an, dass die leere Menge keine Relation ist, denn $(x, x) \in \emptyset$ für kein x. □

Beispiel 1.27. Sei M die Menge der Dreiecke, und definiere xRy, wenn x ähnlich zu y ist, d.h. wenn sie dieselben Innenwinkel haben. Dann definiert R eine Äquivalenzrelation. □

Beispiel 1.28. Sei $p \in \mathbb{N}$. Definiere eine Relation R auf $\mathbb{Z}$ dadurch, dass xRy genau denn, wenn $x - y$ ein Vielfach von p ist. Dann ist R eine Äquivalenzrelation und man schreibt $x = y(\mod p)$. Also ist z.B. für $p = 2$ $[0]$ die Menge aller geraden und $[1]$ die Menge aller ungeraden Zahlen. □

KAPITEL 2

Abbildungen

Intuitiv ist eine Funktion ein mathematisches Objekt, welches Paare von Elementen aus zwei verschiedenen Mengen verbindet. Doch ist es oft wichtig, über eine formellere Definition zu verfügen.

Definition 2.1. *Seien E, F Mengen und G eine Teilmenge von $E \times F$, sodass für jedes $x \in E$ genau ein $y \in F$ gibt, mit $(x, y) \in G$. Dann heißt $f := (E, F, G)$ eine* ***Funktion*** *oder* ***Abbildung****. Dabei heißen E und F* ***Definitionsmenge*** *bzw.* ***Zielmenge*** *von f, und G ist der* ***Graph*** *von f.*

Die Bezeichnung $f : E \to F$ heißt, dass E und F Definitions- bzw. Zielmenge einer gegebener Funktion f sind. Sei $(x, y) \in G$, so schreibt man $f(x) = y$. Das allgemeine Gesetz, das ein beliebiges $x \in E$ nach $f(x) \in F$ abbildet, bezeichnet man oft durch $f : x \mapsto f(x)$.

Definition 2.2. *Sei $f := (E, F, G)$ eine Funktion. Dann heißt f*

- ***injektiv****, falls $x = y$ aus der Bedingung $f(x) = f(y)$ folgt, für alle $x, y \in E$;*
- ***surjektiv****, falls für alle $y \in F$ ein $x \in E$ existiert, sodass $f(x) = y$;*
- ***bijektiv****, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.*

Man sieht, wie wichtig es ist, bei der Definition einer Funktion f die Mengen E, F zu präzisieren. Z.B. können Funktionen mit gleichem Graph aber unterschiedlicher Zielmenge unterschiedliche Eigenschaft haben.

Beispiel 2.3. Sei M eine Menge. Dann kann man stets die **identische Funktion** oder **Identität** definieren: diese ist die Funktion, die jeden $x \in M$ nach x selbst abbildet. Offensichtlich ist die Identität immer bijektiv. □

Beispiel 2.4. Ist $x_0 \in M$, so kann man die **konstante Funktion** $M \to M$ **mit Wert** x_0 durch $x \mapsto x_0$ definieren. Die konstante Funktion ist nicht injektiv, so bald M ein weiteres Element enthält. □

Beispiel 2.5. Sei E die Menge der ICE-Zügen, die in Ulm einmal halten, F die Menge der Ulmer Bahnhöfe. Bildet f jeden ICE auf den Ulmer Bahnhof ab, wo er hält, so ist die Funktion nicht surjektiv, denn ICEs halten in Ulm nur am Hauptbahnhof. Betrachtet man aber die Funktion $\tilde{f} := (E, \tilde{F}, G)$, wobei $\tilde{F} = \{\text{Hauptbahnhof}\} \subset F$ ist, so ist $\tilde{f}$ surjektiv. □

Beispiel 2.6. Betrachte die Mengen M der StudentInnen der Universität Ulm und N der beiden Geschlechter. So kann man die Funktion f betrachten, welche jedem Studierendem sein Geschlecht zuordnet. Eine solche Funktion $f : M \to N$ ist nicht injektiv (so lang an der Universität Ulm mindestens zwei Männer oder zwei Frauen immatrikuliert sind) aber surjektiv (so lang mindestens ein Mann und eine Frau immatrikuliert sind). □

Beispiel 2.7. Betrachte die Menge E der Bundesländer und die Menge F der Landeshauptstädte. Dann ist die Funktion, welche jedem Bundesland seine Landeshauptstadt zuordnet, bijektiv. □

Definition 2.8. *Die Menge $\tilde{F} := \{y \in F : y = f(x) \text{ für mindestens ein } x \in E\}$, die im Beispiel 2.5 eingeführt wurde, heißt* ***Bildmenge*** *von f.*
Ist $U \subset E$, so heißt $f(U) := \{y \in F : y = f(x) \text{ für mindestens ein } x \in U\}$ ***Bild von*** *U* ***unter*** *f. Besteht U aus nur einem Element, etwa $U = \{x\}$, so heißt einfach $y = f(x)$* ***Bild von*** *x* ***unter*** *f. Ist $V \subset F$, so heißt $f^{-1}(V) := \{x \in E : f(x) \in V\}$* ***Urbild*** *von V unter f.*

Eine Funktion ist also genau dann surjektiv, wenn Ihre Zielmenge mit der Bildmenge überein-stimmt. Anders gesagt: gegeben sei eine Funktion $f = (E, F, G)$, so kann man eine neue *surjektive* Funktion dadurch definieren, dass man F durch $\tilde{F} := f(E)$ ersetzt. Auch kann man eine *injektive* Funktion dadurch definieren, dass man die Definitionsmenge durch eine kleinere Menge $\tilde{E}$ ersetzt: die neue dadurch definierte Funktion heißt **Einschränkung von** f **auf** $\tilde{E}$ und wird meistens durch $f_{|E}$ bezeichnet.

Übungsaufgabe 2.9. Wie könnte man die Funktion f aus dem Beispiel 2.4 so einschränken, dass die Einschränkung injektiv ist? Was für eine Funktion würde man dadurch tatsächlich definieren?

Satz 2.10. *Sei E eine Menge mit n Elementen, F eine Menge mit m Elementen, f eine Funktion von E nach F.*
(1) Ist f injektiv, so ist $n \geq m$;
(2) Ist f surjektiv, so ist $n \leq m$.
(3) Ist f bijektiv, so ist $n = m$.
Im Allgemeinen gilt keine der Umkehrungen.

Beweis. (a) Ist f injektiv, so haben paarweise verschiedene Argumente paarweise verschiedene Werte, und somit hat $f(E)$ genauso viele Elemente, wie E. Da $f(E) \subset F$, folgt die Aussage.
(b) Ist f surjektiv, so gibt es für jedes $y \in F$ mindestens ein $x \in E$ sodass $\{x\} \subset f^1(\{y\})$. Da nach Definition von Funktion sind Urbilder zweier verschiedene Werte immer disjunkt, hat $f^{-1}(V) \subset E$ mindestens m Elemente.
(c) Die Aussage folgt unmittelbar aus (a) und (b). $\square$

KAPITEL 3

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

In der Mathematik führt man die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen axiomatisch ein, d.h., die Theorie der natürlichen Zahl kann nicht aus anderen Axiomen (z.B. aus derjenigen der Logik) hergeleitet werden, sondern wird *ad hoc* geschaffen. Auch in der linearer Algebra führt man Theorien (z.B. die der Vektorräume) axiomatisch ein, doch es könnte einem vielleicht besonders seltsam vorkommen, dass man Axiome sogar zur Definition von Zahlen braucht. Das liegt daran, dass man mit Zahlen (sowie Mengen und Vektorräume) formell umgehen möchte, und dazu braucht man universell akzeptierte Manipulationsregel.

Die Konstruktion der natürlichen Zahlen geht auf Giuseppe Peano zurück, welcher 1889 die folgenden Axiome vorschlug. Sie lauten

(A1) 0 ist eine natürliche Zahl.
(A2) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau einen Nachfolger n', der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.
(A3) Es gibt keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 0 ist.
(A4) Jede natürliche Zahl ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.
(A5) Sei M eine Menge, die erfüllt
  - die Zahl $0 \in M$ und
  - ist die natürliche Zahl $n \in M$, so ist auch $n + 1 \in M$,

  so ist bereits $M = \mathbb{N}$, d.h. die Menge der natürlichen Zahlen ist die kleinste, welche die obigen beiden Eigenschaften besitzt.

Manchmal werden wir mit $\mathbb{N}^*$ die Menge $\mathbb{N}^*$ bezeichnen.

Selbstverständlich spiegeln die fünf Peanoschen Axiome die intuitive Vorstellung wieder, die Menschen von natürliche Zahlen haben. Sie beruhen nur auf dem intuitivem Begriff von "Nachfolger" und werden in der Mathematik wie auch alle andere Axiome als unbewiesene Wahrheiten angenommen und benutzt.

Mittels der Peanoschen Axiome (und insbesondere des Begriffs vom "Nachfolger") kann man formell die Addition + zweier Zahlen definieren. Wir verzichten darauf und benutzen die intuitive Vorstellung der Addition. Man beachte, dass die Addition auf $\mathbb{N}$ keine Gruppenoperation definiert, denn keine natürliche Zahl (bis auf 0) hat eine Inverse bzgl. +, denn für alle $x \in \mathbb{N}$ ist $x + y \neq 0$ für jedes $y \in \mathbb{N}^*$. Also definieren wir die Menge $\mathbb{Z}$ axiomatisch als die kleinste Menge, die $\mathbb{N}$ enthält und in der die Addition eine Gruppenoperation definiert. Somit kann man $\mathbb{Z}$ wie üblich als $\{z : z \in \mathbb{N} \text{ oder } -z \in \mathbb{N}^*\}$ definieren, wobei $-n$ die Inverse der Zahl n bezeichnet.

Ähnlich kann man die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als kleinste Menge definieren, die $\mathbb{Z}$ enthält und in der Addition und Multiplikation eine Körperstruktur (vgl. Vorlesung zur linearer Algebra) definiert, also $\mathbb{Q} := \{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*\}$.

Die übliche Anordnung durch $\leq$ und $\geq$ definieren jeweils eine Relation auf $\mathbb{Q}$ (und auf den reellen Zahlen, die noch nicht definiert wurden). Diese kann axiomatisch (und genauer) eingeführt werden: wir setzen jedoch die Anordnung der Zahlen voraus – vgl. [**4**, Kapitel 2] für eine ausführliche Diskussion der Anordnungsaxiome. Für uns ist eigentlich nur wichtig, dass die Anordnung auf $\mathbb{R}$ *vollständig* ist, d.h. es gilt für je zwei reelle Zahlen x, y entweder $x \leq y$ oder $x \not\leq y$ (und im letzterem Fall schreibt man $x > y$). Ist $x \geq 0$ (bzw. $x \leq 0$), so heißt x *positiv* (bzw. *negativ*); ist $x > 0$ (bzw. $x < 0$), so heißt x *strikt positiv* (bzw. *strikt negativ*).

Die vollständige Anordung von $\mathbb{R}$ erlaubt die Einführung einer besonderer Klasse von Mengen.

Definition 3.1. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann heißt die Menge*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

abgeschlossenes Intervall** mit Endpunkte a, b. Weiter betrachtet man auch das **offene Intervall

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

*und die beiden **halboffenen Intervalle***

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \qquad \textit{und} \qquad (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

*Man führt auch die **nach oben** bzw. **nach unten unbeschränkten abgeschlossenen Intervalle***

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \qquad \textit{und} \qquad (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

*sowie die **nach oben** bzw. **nach unten unbeschränkten offenen Intervalle***

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \qquad \textit{und} \qquad (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

ein.

Die Mengen $[0, \infty)$ und $(-\infty, 0]$ werden oft mit $\mathbb{R}_+$ bzw. $\mathbb{R}_-$ bezeichnet.

Definition 3.2. *Sei $M \subset \mathbb{Q}$. M heißt **nach oben beschränkt**, falls ein $x \in \mathbb{Q}$ existiert, sodass $x \geq y$ für alle $y \in M$: ein solches $x \in \mathbb{Q}$ heißt **obere Schranke von** M.*
*Ähnlich heißt M **nach unten beschränkt**, falls ein $x \in \mathbb{Q}$ existiert, sodass $x \leq y$ für alle $y \in M$: ein solches $x \in \mathbb{Q}$ heißt **untere Schranke von** M. Die Menge heißt nach oben bzw. nach unten **unbeschränkt**, wenn sie nicht nach oben oder nach unten beschränkt ist. Sie heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Definition 3.3. *Sei $M \subset \mathbb{Q}$ und x eine obere Schranke von M. Dann heißt x **Supremum** von M, falls $x \leq z$ ist für alle obere Schranken z von M. Ist zusätzlich $x \in M$, so heißt x **Maximum** von M.*
*Sei $M \subset \mathbb{Q}$ und x eine untere Schranke von M. Dann heißt x **Infimum** von M, falls $x \geq z$ ist für alle untere Schranken z von M. Ist zusätzlich $x \in M$, so heißt x **Minimum** von M.*

Anmerkung 3.4. Zeige: Das Infimum einer Menge aus positiven (bzw. negativen) Zahlen ist stets positiv (bzw. negativ), aber das Infimum einer Menge aus *strikt* positiven (bzw. strikt negativen) Zahlen muss nicht *strikt* positiv (bzw. negativ) sein: betrachte z.B. die Menge $(0, 1)$, deren Infimum 0 ist.

Beispiel 3.5. Betrachte die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$. Dann ist M nach unten beschränkt, denn jede rationale Zahl $\frac{n}{m}$ mit $n \leq 0$ und $m \in \mathbb{N}^*$ ist eine untere Schranke: 0 ist Infimum und auch Minimum von M. □

Beispiel 3.6. Betrachte die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$. Dann ist M nach oben beschränkt, denn z.B. 2 ist eine obere Schranke. Wie man schon ahnt wäre die kleinste obere Schranke $\sqrt{2}$, die aber *nicht* in $\mathbb{Q}$ liegt, und somit auch nicht in M (also kein Maximum wäre!). □

Beispiel 3.7. Die Menge $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Ihr Minumum ist 0. □

Wir definieren die Menge der reellen Zahlen durch eine abstrakt Eigenschaft wie folgt.

Definition 3.8. *Die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen** bildet (mit Addition und Multiplikation) den einzigen angeordneten Körper, der vollständig ist, d.h: jede nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum (oder äquivalent: jede nach unten beschränkte Teilmenge hat ein Infimum). Jede Zahl aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt **irrational**.*

Satz 3.9. *Die Zahl $\sqrt{2}$ gehört zu $\mathbb{R}$ aber nicht zu $\mathbb{Q}$.*

Dieses Resultat taucht (mit Beweis!) bereits in *Menon* auf, einem Dialog des griechischen Philosophen Platon.

Beweis. Dass die Zahl $\sqrt{2}$ reell ist, folgt aus der Definition von $\mathbb{R}$, denn $\sqrt{2}$ ist das Supremum der Menge M aus Beispiel 3.6 und muss somit in $\mathbb{R}$ liegen.

Sei nun $\sqrt{2}$ rational angenommen, dann lässt sie sich als gekürzten Bruch $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ darstellen. Dann ist $m^2 = 2n^2$, und somit ist m^2 gerade. Es folgt unmittelbar, dass m selber gerade ist, also $m = 2p$ für $p \in \mathbb{Z}$ passend. Also gilt $4p^2 = (2p)^2 = m^2 = 2n^2$, also $2p^2 = n^2$, und somit sind auch n^2 und n gerade. Der Bruch ist also nicht vollständig gekürzt. Somit wird eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert, welche gegen x_0 konvergiert und jedoch ohne dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert, ein Widerspruch zur Annahme. □

Anmerkung 3.10. Das Resultat im Satz 3.9 war im alten Griechenland bahnbrechend. Viele Mathematiker haben sich damit beschäftigt. 14 weitere, alternative Beweise vom Satz 3.9 kann man unter `www.cut-the-knot.org/proofs/sq_ro`

Beispiel 3.11. Betrachte erneut die Menge M aus dem Beispiel 3.6. Die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ ist also Supremum von M, obwohl $M \subset \mathbb{Q}$. □

Definition 3.12. *Der* ***Betrag*** $|x|$ *einer reellen Zahl* x *wird durch*

$$|x| := \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Er entspricht dem Abstand zwischen x *und 0 auf der reellen Achse. Das* ***Signum*** $\operatorname{sign} x$ *von* x *wird definiert durch*

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine wichtige Eigenschaft des Betrags wird im folgendem geschildert

Lemma 3.13. *Seiein* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Dann gilt*

(1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung),*
(2) $|z_1 z_2| \leq |z_1||z_2|$ *(Multiplikativität des Betrags),*
(3) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ *(Inverse Dreiecksungleichung).*

Beweis. (1) Beide Seiten sind positiv, genau dann gilt also die Ungleichung, wenn die Quadrate der beiden Seiten eine dementsprechende Ungleichung erfüllen: also soll man zeigen, dass

$$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} \;\leq\; z_1\overline{z_1}+2|z_1z_2|+z_2\overline{z_2},$$

Setzt man $z := z_1\overline{z_2}$, so bleibt $z+\bar{z} \leq 2|z|$ zu zeigen. Sei $z = a + ib$. Dann gilt

$$(a + ib) + (a - ib) = 2a \leq 2\sqrt{a^2+b^2}$$

und somit $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, was immer gilt. □

Übungsaufgabe 3.14. Beweise Lemma 3.13.(2).

Übungsaufgabe 3.15. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und betrachte die Menge $\{x, y\}$. Zeige, dass

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \text{und} \quad \min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $\max\{x, y\}$ die größere der beiden Zahlen x, y und $\min\{x, y\}$ die kleinere der beiden Zahlen x, y bezeichnet.

Übungsaufgabe 3.16. Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\inf A = -\sup(-A)$$

gilt, wobei $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$.

Übungsaufgabe 3.17. Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeige, dass
$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$
gilt, wobei $(A+B) := \{x+y \in \mathbb{R} : x \in A,\ y \in B\}$.
(Hinweis: Um $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$ *zu zeigen, beweise man, dass* $\sup(A+B) - x \geq \sup B$ *für beliebige* $x \in A$.*)*

Definition 3.18. *Eine Menge M heißt **abzählbar**, wenn es eine Teilmenge $N \subset \mathbb{N}$ und eine Funktion $f : N \to M$ gibt, welche bijektiv ist. Ist eine Menge nicht abzählbar, so heißt sie **überabzählbar**.*

Insbesondere gilt folgendes: Ist eine Menge abzähblar, so ist jede ihrer Teilmengen abzählbar; ist eine Menge überabzählbar, so ist auch jede weitere Menge, die sie enthält.

Wir merken an, dass die Abzählbarkeit einer Menge dazu äquivalent ist, dass man einen Algorithmus beschreiben kann, um *alle* Elemente einer Menge abzuzählen (daher der Name).

Satz 3.19. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Zum Beweis reicht es einen Abzählalgorithmus auf $\mathbb{Q}$ zu formulieren. Betrachte die Punkte auf einem 2-dimensionalem Gitter $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Jede rationale Zahl $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ lässt sich mit einem Punkt dieses Gitter identifizieren. Man duchlaufe dieses Gitter entlang konzentrischen (alternieren gegen den Uhrzeigersinn und im Uhrzeigersinn) Halbkreisen, also $(0,1) \to (1,1) \to (0,2) \to (-1,1) \to (-2,1) \to (-1,2) \to (0,3) \to (1,2) \to (2,1) \to (3,1) \to \ldots$. Dadurch werden alle rationale Zahlen aufgelistet. $\square$

Das folgende Resultat wurde von Georg Cantor bewiesen.

Satz 3.20. *Die Menge* $[0,1]$ *ist überabzählbar.*

Beweis. Sei eine Abzählung von $[0,1]$ möglich, liste also $[0,1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$ auf. Jedes x_i hat eine Darstellung als Dezimalzahl, also $x_i = 0, x_{i1}x_{i2}x_{i3}\ldots$, wobei jedes x_{ij} eine Ziffer ist. Sei nun
$$\tilde{x} := 0, \tilde{x_1}\tilde{x_2}\tilde{x_3}\ldots,$$
wobei
$$\tilde{x_k} := \begin{cases} 0 & \text{falls } x_{kk} = 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Dann ist nach Konstruktion $\tilde{x}$ sowohl eine Dezimalzahl (also muss $\tilde{x} \in [0,1]$ sein), als auch von allen Zahlen $x_1, x_2, \ldots$ unterschiedlich. Dies widerspricht die Annahme, dass *jede Zahl zwischen 0 und 1 bereits durch $x_1, x_2, \ldots$ aufgelistet wurde*, und beweist die Aussage. $\square$

Anmerkung 3.21. Wir merken an, dass dieser Beweis eine Anwendung des allgemeinen *Cantorschen Diagonalverfahrens*. Insbesondere, dieses Verfahren lässt sich auch zu anderen Zahlensystemen ohne Änderungen anwenden, z.B. binär, vgl. Kapitel 6. Eine anschauliche Darstellung dieses Verfahrens findet man unter `http://en.wikipedia.org/wiki`

Insbesondere ist jede Menge, die $[0,1]$ enthält, überabzählbar.

Korollar 3.22. $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Genauer gesagt kann man leicht eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{R}$ und $[0,1]$ finden. Eine solche Abbildung zu zeichnen ist viel leichter, als sie analytisch zu definieren, vgl. [**2**, S. 123].[1]

[1] Eigentlich ist [**2**] ein meistens gelungenes Experiment von Wissenschaftspopularisierung vieler Themen, welche mit der Urgeschichte der Analysis und der Mengenlehre verbunden sind. Auf einem höheren Niveau kann man auch [**1**] erwähnen, welche fast alle Themen dieser Vorlesung informell aber mathematisch genau behandelt.

Anmerkung 3.23. Man nennt *algebraisch* alle Zahlen, die Nullstellen eines Polynoms mit rationalen koeffizienten sind (insbesondere sind alle rationale Zahlen algebraisch). Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra ist auch die Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen abzählbar, also muss die Überabzählbarkeit von $[0,1]$ an $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ liegen. Die Zahlen aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ heißen transzendent und sogar deren Existenz wurde vor 1844 bloß vermutet, bis Joseph Liouville sie endlich beweisen konnte, vgl. [**1**, § II.6.2].

Übungsaufgabe 3.24. a) Sei A eine nicht-leere Menge. Bezeichne $\mathcal{P}(A)$ die *Potenzenmenge* von A, d.h., die Menge aller Teilmengen von A. Zeige: Es existiert keine surjektive Abbildung von A nach $\mathcal{P}(A)$. *(Hinweis: Betrachte die Menge $B := \{x \in A : x \notin f(x)\}$.)*

b) Folgere, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht abzählbar ist.

c) Sei A_n eine nicht-leere abzählbare Menge, für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar ist *(Hinweis: Imitiere den Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$.)*

d) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

Eine schöne Erklärung der mathematischen Schritten, die zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ führen, ja deren Notwendigkeit findet man in [**1**, Chapt. 2].

Eine weitere Zahlenmenge spielt in der Mathematik eine sehr wichtige Rolle: die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Sie wird dadurch eingeführt, dass man annimmt, die Gleichung $x^2 = -1$ habe eine Lösung, die man mit i bezeichnet; und dass man darüber hinaus die Menge $\mathbb{C}$ der geordneten Paaren $(a, b) \equiv a + ib$ betrachtet, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, mit passend definierter Addition und Multiplikation versehen. Die Grundeigenschaften dieser Mengen kann man in jedem Lehrbuch nachschlagen, z.B. [**3**, §5.3] oder [**4**, Kapitel 3], und werden in dem 2. Übungsblatt zu dieser Vorlesung zusammengefasst. Man beachte insbesondere, dass zu jeder komplexer Zahl $z := a + ib$ wird eine weitere, sogenannte *komplex konjugierte* Zahl zugeordnet: $\overline{z} := a - ib$. Insbesondere löst auch $\overline{i}$ die Gleichung $x^2 = -1$, also ist die Wurzel einer Zahl in $\mathbb{C}$ nicht eindeutig. Allgemeiner gilt: für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n komplexe Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, sodass $x_1^n = \ldots = x_n^n = 1$.

Dann kann man erneut den Betrag einer Zahl z durch $|z|^2 := z\overline{z}$ einführen (man beachte, diese Definition stimmit mit (3.1) überein, falls die Zahl reell ist). Es ist wichtig anzumerken, dass auch dieser komplexer Betrag die Dreiecksungleichung erfüllt und multiplikativ ist.

Der Grund, warum man wahlweise und alternativ mit $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ arbeitet, ist dass $\mathbb{C}$ sowohl Vor- als auch Nachteile gegenüber $\mathbb{R}$ hat. Eine Gleichung n. Grades hat z.B. stets *komplexe* Lösungen (aber nicht unbedingt *reelle* Lösungen – s. Fundamentalsatz der Algebra), aber auf $\mathbb{C}$ kann man keine *vollständige* Anordnung definieren: d.h., es gibt *kein* Analogon oder Erweiterung $\leq_{\mathbb{C}}$ der Relationen $\leq$, welche mit der Addition und Multiplikation verträglich ist und erlauben kann, jede beliebige komplexe Zahl auf Positivität zu prüfen (z.B. ist es unmöglich, die komplexe Zahlen $i \equiv (0, 1)$ und $1 \equiv (1, 0)$ anzuordnen).

Was noch? Etliche Mathematiker haben versucht, die Konstruktion von Zahlen weiter zu verallgemeinern. 1843 sind somit durch William Hamilton *Quaternionen* (ihre Menge wird durch $\mathbb{H}$ bezeichnet) und durch John T. Graves *Oktonien* ($\mathbb{O}$) eingeführt worden. Quaternionen können als 4-Tupel dargestellt werden, Oktonien sogar als 8-Tupel. Sie spielen aber in der Mathematik eine sehr viel kleinere Rolle als komplexe Zahlen. Über 150 Jahre nach ihre Einführung muss man sagen, dass wesentliche Anwendungen (noch) fehlen, die ihre Untersuchung motivieren könnten. Ihre Bedeutung ist also fast nur historisch: eine Wikipedia-Recherche ist aber trotzdem interessant – etwa um zu entdecken, warum man nicht weiter geht, um 2^n-Tupel einzuführen.

KAPITEL 4

Vollständige Induktion und Kombinatorik

Insbesondere stellt das 5. Peanosche Axiom einen mächtigen Weg dar, um Sätze zu beweisen. Aus (A5) folgt nämlich unmittelbar der folgende

Satz 4.1 (Induktionsprinzip). *Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ eine Aussage über die Zahl n. Gelte $A(1)$ ("Induktion-sanfang") und darüberhinaus folge aus der Gültigkeit von $A(n)$ dass auch $A(n+1)$ gilt ("Induktionsschritt"), für $n \in \mathbb{N}$ beliebig. So gilt $A(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ gilt}\}$. Dann ist nach Voraussetzung $0 \in M$ und zusätzlich aus $n \in M$ folgt $n + 0 \in M$. Somit ist nach dem 5. Peanoschen Axiom $M = \mathbb{N}$, d.h., $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Anmerkung 4.2. Das Induktionsprinzip kann in vielerlei Arten verallgemeinert werden, etwa in dem man die Menge $\mathbb{N}$ durch eine ihrer (unendlicher) Teilmengen ersetzt. Eine nützliche Erweiterung des Induktionsprinzip bietet die sogenannte **vollständige Induktion** an: "Gelte $A(1)$ und darüberhinaus folge aus der Gültigkeit von allen Aussagen $A(1), \ldots, A(n)$ dass auch $A(n+1)$ gilt, für $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so gilt $A(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beispiel 4.3. Der junge Carl–Friedrich Gauß zeigte mittels Induktionsprinzip, dass die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$ ist. Dies kann man dank dem Induktionsprinzip nachvollziehen: für $n = 1$ gilt die Aussage offensichtlich $(1 = \frac{1}{2}1(1+1))$. Sei nun $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$, so ist

$$1 + 2 + \ldots + n + n + 1 = \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = \left(\frac{1}{2}n + 1\right)(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Vorsicht! Zum Beweis durch Induktion sind tatsächlich beide Voraussetzungen nötig: denn z.B. die Aussage

$$\tilde{A}(n) := \text{“}1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 7 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\text{”} \qquad \text{ist falsch,}$$

obwohl der Induktionschritt $\tilde{A}(n) \Rightarrow \tilde{A}(n+1)$ gilt: das liegt daran, dass der Induktionsanfang $\tilde{A}(1)$ falsch ist. □

Beispiel 4.4. Insbesondere lassen sich die Gleichungen aus Satz 1.15 auf den Fall von endlich vielen Mengen $M_1, \ldots, M_n$ (statt nur M, N) verallgemeinern. □

Übungsaufgabe 4.5. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ und}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \text{gilt.}$$

Übungsaufgabe 4.6. Sei $p > -1$. Zeige, dass $(1+p)^n \geq (1+np)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 4.7. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und alle reelle Zahlen $x \in (0,1)$ die Ungleichung

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}$$

gilt.

Übungsaufgabe 4.8. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage sodass

(1) $A(n_0)$ richtig für $n_0 \in \mathbb{N}$ ist, und
(2) für $m \geq n_0$ gilt: ist $A(m)$ richtig, so ist auch $A(m+1)$ richtig.

Zeige mit Hilfe des Peanoschen Axioms, dass dann $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Satz 4.9. *Sei M eine Menge. Sei eine Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ nur rekursiv definiert, d.h.,*

- *$f(0)$ sei gegeben und*
- *es gebe eine Vorschrift, mit der aus $f(n-1)$ der Wert $f(n)$ bestimmbar ist.*

Dann ist die Funktion eindeutig bestimmt.

Beweis. Der Beweis erfolgt über Induktion. Sei $A(n)$ die Aussage "$f(n)$ ist eindeutig bestimmt". Dann gelten sowohl der Induktionsanfang $A(1)$ als auch der Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ nach Voraussetzung. □

Beispiel 4.10. Die möglicherweise berühmteste rekursiv definierte Funktion wurde von Leonardo "Fibonacci" Pisano 1202 erfunden – oder vielleicht nur nach Europa eingeführt: 1985 wurden z.B. in der Nähe von Finike (Türkei) 12 Waagengewichte aus dem XIII Jh. v. Chr. entdeckt, welche scheinen den Vielfachen einer (heute unbekannten) Gewichtseinheit bzgl. den Fibonacci-Zahlen zu entsprechen, vgl. `http://mtcs.truman.edu/ thammond/history/Archa`
Sie ist folgendermaßen definiert:

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad f(n) := f(n-1) + f(n-2),\ n = 2, 3, \ldots.$$

Dass f wohldefiniert kann man durch vollständige Induktion beweisen. Die biologische Motivation für die Einführung von f ist naiv, aber f taucht erstaunlicherweise oft in der Natur auf (mehr dazu z.B. unter `http://www.pijnappel2.tmfweb.nl/de`
Es ist z.B. bekannt, dass Honigbiene Männchen ohne Befruchtung, aber Weibchen mit Befruchtung zeugen – anders gesagt hat jedes Männchen ein Elternteil und jedes Weibchen zwei. Ein Männchen hat somit 1 Elter (seine Mutter), 2 Großeltern (Mutter und Vater seiner Mutter), 3 Großgroßeltern (beide Eltern seiner Großmutter und die Mutter seines Großvaters, 5 Großgroßgroßeltern, 8 Großgroßgroßgroßeltern usw., und i.A. $f(n)$ (Groß)$^{n-2}$eltern. □

Definition 4.11. *Sei $n \in \mathbb{N}$.*

(1) Die Zahl $n!$ (Aussprache: "n Fakultätf") bezeichnet

$$0! := 1, \qquad n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \qquad n \geq 1.$$

*(2) Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ bezeichnet*

$$\binom{n}{0} := 1, \qquad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Unter "Anordnung" einer Menge A mit n Elementen versteht man ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ aus A^n, sodass alle Einträge x_i paarweise disjunkt sind. Dann gilt der folgende

Satz 4.12. *Die Anzahl der Anordnungen einer Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist $n!$.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über n. Die Aussage ist offensichtlich gültig für $n = 1$. Sei nun $n!$ die Anzahl der Anordnungen von $\{x_1, \ldots, x_n\}$: betrachte alle Anordnungen von $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$, sodass x_i als erste Koordinate der Anordnung auftritt: für ein festes i gibt es nach Induktionsannahme $n!$ davon. Wiederholen wir die Argumentation für $i = 1, 2, \ldots, n+1$, so hat man insgesamt $n!(n+1) = (n+1)!$ Anordnungen, und somit ist der Induktionsschritt bewiesen. □

Satz 4.13. *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist $\binom{n}{k}$.*

Beweis. Die Aussage gilt für $k = 0$, denn die leere Menge ist nach Definition die einzige Teilmenge ohne Elemente.

Nach Satz 4.12 betrachtet man für $k \neq 0$ alle $n!$ möglichen Anordnungen der Menge und sucht sich alle Möglichkeiten, die ersten k Koordinaten mit paarweise unterschiedlichen Elementen zu besetzen. Es gibt nun $k!$ Anordnungen dieser Elementen in den ersten k Koordinaten, und $(n-k)!$ Anordnungen der übrigen Elementen in den letzten $n-k$ Koordinaten. Da Anordnungen keine Rolle bei der Definition einer Menge spielen, muss man also $n!$ durch $k!$ und $(n-k)!$ teilen, was die Aussage unmittelbar liefert. □

Übungsaufgabe 4.14. Wieviele Teilmengen hat insgesamt eine n-elementige Menge?

Übungsaufgabe 4.15. Sei M eine Menge mit endlich vielen Elementen. Zeige durch vollständige induktion über die Anzahl n der Elementen von M, dass die Potenzmenge von M genau 2^n Elemente hat.

Satz 4.16. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede Zahl x gilt*

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

Beweis. Es gilt

$$(1+x)^n = (1+x) \cdot \ldots \cdot (1+x).$$

So besteht $(1+x)^n$ aus der Summe aller Produkte, die genau einen Summant aus jedem der n Termen $(1+x)$ enthalten. Es gibt nun laut Satz 4.13 genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus diesen n Termen den Summant x k-mal auszuwählen (und somit den Summant 1 $(n-k)$-mal). Durch Ausmultiplizieren folgt die Aussage. □

Übungsaufgabe 4.17. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k+1$ die Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

gilt, und interpretiere das sogenannte *Pascalsche Dreieck*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1,
\end{array}$$

nach Blaise Pascal genannt.

Übungsaufgabe 4.18. Zeige, dass
(1) $n^2 \leq 2^n$ für jede natürliche Zahl $n \neq 3$ und
(2) $2^n < n!$ für jede natürliche Zahl $n \geq 4$.

KAPITEL 5

Folgen

DEFINITION 5.1. *Eine Funktion f mit Definitionsmenge $\mathbb{N}$ (oder $\mathbb{N}^*$, oder allgemeiner irgendeiner abzählbare Menge) heißt **Folge**.*

Oft schreibt man x_n statt $f(n)$, und für die gesamte Folge (bzw. Funktion) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ oder $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

BEISPIEL 5.2. Bezeichne mit x_n die höchste Temperatur, die am n. März 2008 in Ulm gemessen wurde, wenn $n \leq 31$, oder $x_n = 0$ sonst. Dann definiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine Folge. □

BEISPIEL 5.3. Sei F eine Menge und $y \in F$. Sei $x_n := y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. So definiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *konstante Folge.* □

Besonders wichtig sind für uns die Folgen mit Werten in einer Mengen von Zahlen, etwa $\mathbb{C}$: eine solche Folge wird *numerische Folge* genannt. Spricht man im Folgendem von "Folge", so wird man immer eine numerische Folge meinen.

DEFINITION 5.4. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Folge **beschränkt**, falls $M > 0$ existiert, sodass $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

DEFINITION 5.5. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Folge **monoton wachsend** (bzw. **fallend**), falls $x_n \leq x_{n+1}$ (bzw. $x_{n+1} \leq x_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt **streng** monoton wachsend (bzw. **streng** monoton fallend), falls $x_n < x_{n+1}$ (bzw. $x_{n+1} > x_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$.*

BEISPIEL 5.6. Ist $F = \mathbb{R}$, so ist die konstante Folge aus dem Beispiel 5.3 ist beschränkt, monoton fallend *und* wachsend. □

BEISPIEL 5.7. Sei $x_n := (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. So definiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge, die nicht monoton ist (weder fallend noch wachsend). Die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls unbeschränkt, aber monoton wachsend. □

BEISPIEL 5.8. Durch $(1, -1, 1, -1, \ldots)$ wird eine Folge definiert. Diese Folge ist beschränkt aber nicht monoton (weder fallend noch wachsend). Strebt sie gegen eine Zahl? Gegen 1 oder gegen -1? Oder vielleicht gegen ihren Mittelwert 0, wie manche mittelalterliche Mathematiker dachten? Dies kann formell mittels des modernen Begriffs von Konvergenz untersucht werden. □

DEFINITION 5.9. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in \mathbb{C}$. Dann sagt man, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **gegen** x **konvergiert**, falls für alle $m \in \mathbb{N}^*$ ein Index $N_m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|x_n - x| \leq \frac{1}{m}$ für alle größere Indizes $n \geq N_m$. In diesem Fall schreibt man $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, und x heißt **Grenzwert** der Folge. Existiert der Grenzwert einer Folge, so heißt sie **konvergent**. Ist der Grenzwert $x = 0$, so heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Nullfolge**.*

ANMERKUNG 5.10. Es folgt unmittelbar aus obiger Definition, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen x konvergiert, wenn die Folge $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

SATZ 5.11. *Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gibt es nur einen Grenzwert x.*

Beweis. Betrachte zwei Grenzwerte x, y. Sind sie verschieden, d.h. $x \neq y$, so ist der Betrag $M := |x-y| > 0$. Sei nun $m \in \mathbb{N}^*$, sodass $\frac{1}{m} \leq \frac{M}{3}$. Dann gibt es nach Definition von Konvergenz ein $N_{\frac{M}{3}}$, sodass

$$|x_n - x| \leq \frac{M}{3} \quad \text{sowie} \quad |y_n - y| \leq \frac{M}{3} \qquad \text{für alle } n \geq N_{\frac{M}{3}}.$$

Also gilt für alle $n \geq N_{\frac{M}{3}}$ wegen der Dreiecksungleichung

$$M = |x-y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| \leq \frac{M}{3} + \frac{M}{3} = \frac{2}{3}M,$$

ein Widerspruch zur Annahme, dass $M > 0$. □

Anmerkung 5.12. Ist man mit $\mathbb{C}$ noch nicht ganz vertraut, so ist das an dieser Stelle kein Problem! Denn der Grenzwert einer konvergenten Folge mit Gliedern aus $\mathbb{R}$ ist ebenfalls eine relle Zahl. Ähnlich ist der Grenzwert einer konvergenten Folge mit Gliedern aus $\mathbb{R}_+$ auch eine positive Zahl. Aber Vorsicht! Sind die Glieder einer konvergenten Folge *rationale* Zahlen, so ist ihr Grenzwert nicht unbedingt eine rationale Zahl. Das liegt daran, dass $\mathbb{Q}$ kein vollständig angeordneter Körper ist. Z.B. sind die Zahlen $(1 + \frac{1}{n})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ rational, doch konvergiert die dadurch definierte Folge gegen eine irrationale Zahl, vgl. Satz 5.27.

Übungsaufgabe 5.13. Zeige, dass die Folge im Beispiel 5.8 nicht konvergiert.

Beispiel 5.14. Betrachte die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$: Sie konvergiert gegen $x = 0$. Sei nämlich $m \in \mathbb{N}^*$, so ist für $N_m = m$

$$|x_n - x| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \qquad \text{für alle } n \geq N_m.$$

□

Anmerkung 5.15. Die Glieder der Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ werden also beliebig klein, wenn man n groß genug wählt: die Definition einer konvergenten Folge kann man also auch dadurch ausdrücken, dass für alle Zahlen $\varepsilon > 0$, ein Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|x_n - x| \leq \varepsilon$ für alle größere Indizes $n \geq n_\varepsilon$, kürzer:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n - x| \leq \varepsilon \; \forall n \geq n_\varepsilon;$$

denn für alle $m \in \mathbb{N}^*$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \frac{1}{m}$, und umgekehrt für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $m \in \mathbb{N}^*$ mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$, also kann man mit beiden Notationen das Ziel erreichen, eine beliebige Genauigkeit bei der Approximation des Grenzwertes zu fordern.

Satz 5.16. *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. So ist die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Es gibt nach Voraussetzung $M > 0$, sodass $|y_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und betrachte eine natürliche Zahl $\tilde{m} \geq mM$. Dann gibt es ein $N_{\tilde{m}}$, sodass $|x_n| \leq \frac{1}{\tilde{m}}$ für alle $n \geq N_{\tilde{m}}$. Also gilt für alle $n \geq N_{\tilde{m}}$ aufgrund der Multiplikativität des Betrags

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq \frac{M}{\tilde{m}} \leq \frac{1}{m},$$

also ist $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. □

Also ist eine Folge gegen x konvergent, wenn ihre Glieder beliebig nah an x kommen, und schließlich (d.h. für größere Indizes) auch dort bleiben.

Übungsaufgabe 5.17. Zeige, dass jede konvergente Folge beschränkt ist, aber nicht umgekehrt.

Satz 5.18. *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen. Dann ist die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Produkte ihrer Glieder eine beschränkte Folge.*

Insbesondere ist das Produkt einer konvergenten und einer beschränkten Folge beschränkt.

Satz 5.19 (Rechenregel für konvergente Folgen). *Gegeben seien zwei Folgen,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *welche gegen* x *bzw.* y *konvergieren. Dann gelten die folgenden Rechenregel.*

(1) Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.
(2) Die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und* $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$.
(3) Ist $y_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und auch* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *so ist die Folge* $(\frac{x_n}{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent und* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$.

Beweis. (1) Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es N^1_{2m} und N^2_{2m}, sodass $|x_n - x| \leq \frac{1}{2m}$ und $|y_n - y| \leq \frac{1}{2m}$ für alle $n \geq N^1_{2m}$ bzw. $n \geq N^2_{2m}$. Setze $N_m := \max\{N^1_{2m}, N^2_{2m}\}$. Dann gilt

$$|x_n + y_n - x - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}.$$

(2) Es reicht zu zeigen, dass

$$(x_n y_n - xy)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n y_n - xy_n + xy_n - xy)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n - x)y_n + x(y_n - y))_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Nullfolge ist. Man beachte, dass $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung bzw. laut Aufgabe 5.17 eine Nullfolge bzw. eine beschränkte Folge sind, also ist dank Satz 5.16 ihr Produkt eine Nullfolge. Ähnlich zeigt man, dass auch $(x(y_n - y))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und somit auch ihre Summe. Das vollendet den Beweis. □

Anmerkung 5.20. Es folgt aus dem Satz 5.19.(2), dass $\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n$ für jede Zahl α und jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Übungsaufgabe 5.21. Beweise den Satz 5.19.(3).

Übungsaufgabe 5.22. Prüfe folgende Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

(1) $x_n := (-1)^n$;
(2) $x_n := i^n$;
(3) $x_n := n + (-1)^n n$.

Übungsaufgabe 5.23. Zeige sowohl durch direkten Nachweis (entsprechend der Definition), als auch durch Ausnutzung der Rechenregeln für Grenzwerte, dass die folgende Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren:

- $x_n := \frac{n^2+n+1}{n^3+n^2+n+1}$,
- $x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1$,
- $x_n := \frac{3n^2-4n+1}{4n^2+5n-17}$.

Wie man der Definition entnehmen kann, spielen in der Tat bei Konvergenz nur "spätere Glieder" eine Rolle. Genauer gilt der folgende

Satz 5.24. *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine gegen* x *konvergente Folge. Sei* $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ *und betrachte eine beliebige neue Folge* $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *sodass* $x_n = \tilde{x}_n$ *für alle* $n \geq \tilde{N}$. *Dann konvergiert auch* $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* x.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}^*$. Nach Voraussetzung gibt es $N_m \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x| \leq \frac{1}{m}$ für alle $n \geq N_m$. Sei nun $\tilde{N}_m := \max\{N_m, \tilde{N}\}$. Dann ist $|\tilde{x}_n - x| = |x_n - x| \leq \frac{1}{m}$ für alle $n \geq \tilde{N}_m$. □

Es ist meistens möglich, die Konvergenz einer Folge direkt zu überprüfen. Doch manchmal ist es nützlich, ein Konvergenzresultat aus der Konvergenz anderer Folgen bzw. aus anderen Eigenschaften der gegebenen Folge zu folgern.

Satz 5.25 (Sandwichsatz oder Satz der Polizisten). *Seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit gleichem Grenzwert* $x \in \mathbb{R}$. *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine dritte Folge, sodass es ein* $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ *gibt mit* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *für alle* $n \geq \tilde{N}$. *Dann konvergiert auch* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* x.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}^*$. Dann gibt es $N_{1m}, N_{2m} \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x| \leq \frac{1}{2m}$ für alle $n \geq N_{1m}$ und $|y_n - x| \leq \frac{1}{2m}$ für alle $n \geq N_{2m}$. Sei nun $\tilde{N}_m := \max\{N_{1m}, N_{2m}\}$. Dann gilt für $n \geq \tilde{N}_m$

$$x - \frac{1}{m} \leq x_n \leq z_n \leq y_n \leq x + \frac{1}{m}$$

und somit

$$-\frac{1}{m} \leq z_n - x \leq \frac{1}{m},$$

d.h. $|z_n - x| \leq \frac{1}{m}$. □

Korollar 5.26. *Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $0 \leq z_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Betrachte die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit konstantem Wert 0 und wende Satz 5.25 an. □

Die möglicherweise berühmteste Anwendung des obigen Satzes ist der folgende

Satz 5.27. *Die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergiert. Der Grenzwert dieser Folge wird mit e bezeichnet.*

Anmerkung 5.28. Die Bezeichnung e steht für (Leonard) Euler und/oder für "Exponential(funktion)", vgl. `http://www.zeit.de/2007/24/N-Eulersche-Zahl`. Genaues weißt man nicht, denn eine solche Bezeichnung wurde von Euler selber eingeführt. (Die Zahl selber ist jedoch bereits 1690 erschienen, in einem Brief von Gottfried Leibniz). Heute ist bekannt, dass die Zahl e in mehreren Bereichen auftaucht: insbesondere wurde sie von Jacob Bernoulli zur Zinseszinskalkulation untersucht.

Schließlich stellen wir ein letztes Kriterium zur Entscheidung der Konvergenz einer Folge vor.

Satz 5.29 (Cauchysche Konvergenzkriterium). *Genau dann ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, wenn für alle $m \in \mathbb{N}^*$ ein $N_m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass*

$$|x_n - x_p| \leq \frac{1}{m} \qquad \text{für alle } n \geq p \geq N_m.$$

Das obige Kriterium besagt, dass eine Folge genau dann konvergent ist, wenn es einen Index gibt, sodass *alle* folgenden Folgenglieder nah beieinander sind. Vorsicht! Es reicht dazu nicht, dass nur die Folgenglieder x_n, x_{n+1} für große n beliebig nah aneinander liegen!

Übungsaufgabe 5.30. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Definiere eine neue Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$\tilde{x}_n := \begin{cases} x_{n-100}, & \text{wenn } n \geq 101, \\ x_n, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n$.

Übungsaufgabe 5.31. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} := \left(\frac{n^2}{n^2+2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(1) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.
(2) Zu $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, und $\varepsilon = 10^{-6}$ bestimme das kleinste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$.

Übungsaufgabe 5.32. Bestimme den Grenzwert der folgenden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) $x_n := \frac{n}{n+1}$;
(2) $x_n := \frac{n^2}{2^n}$;
(3) $x_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Hinweise: Zu (2): benutze Übungsaufgabe 4.18. Zu (3): erweitere den Bruch $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}$ mit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

Beispiel 5.33. Betrachte die Zahl $0,\overline{9} = 0,99999\ldots$. Damit ist wohl die Zahl gemeint, die als Grenzwert des Approximationsprozesses

$$0,9, \qquad 0,99, \qquad 0,999, \qquad \ldots,$$

erhalten wird, d.h. der Grenzwert der Folge

$$\left(\frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1000}, \ldots, 1 - \frac{1}{10^n}, \ldots\right).$$

Es gilt offensichtlich

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{10^n} \leq 1,$$

und dank dem Satz 5.25 sieht man, dass $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{10^n}) = 1$. Also ist $0,\overline{9} = 1$. □

Im Beispiel 5.7 haben wir den Fall zweier Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gesehen, welche unbeschränkt sind – und somit notwendigerweise nicht gegen eine relle Zahl konvergieren. Doch oszillieren die Werte der ersten Folge ständig und zwar mit immer größeren Sprüngen, während die zweite Folge regelmäßig wächst. Wir möchten diese beide Verhaltensweisen unterscheiden: dazu betrachten wir die folgende

Definition 5.34. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{R}$. Die Folge heißt* ***uneigentlich gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) konvergent****, falls für alle $M \in \mathbb{N}$ einen Index $N_M \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n \geq M$ (bzw. $x_n \leq -M$) für alle $n \geq N_M$.*

Anmerkung 5.35. Nach Definition ist jede uneigentlich konvergente Folge auch unbeschränkt.

Definition 5.36. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, welche weder gegen ein $x \in \mathbb{R}$ noch uneigentlich gegen $+\infty$ oder $-\infty$ konvergiert. Dann heißt die Folge* ***divergent****.*

Satz 5.37. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Gliedern aus $\mathbb{R}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend (bzw. fallend).*

(1) Genau dann ist die Folge konvergent, wenn sie beschränkt ist: in diesem Fall stimmt ihr Grenzwert mit dem Supremum (bzw. Infimum) x der Menge $\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ überein.

(2) Genau dann ist die Folge unbeschränkt, wenn sie gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) uneigentlich konvergiert.

Beweis. Sei o.B.d.A. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend – sonst betrachte $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Sei $m \in \mathbb{N}^*$ und $x := \sup\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \leq x \leq x + \frac{1}{m},$$

wobei die erste Ungleichung gilt, weil x eine obere Schranke der Menge ist, und die zweite, weil $\frac{1}{m}$ stets positiv ist. Aus der Übung 12.17 folgt auch, dass ein $N_m \in \mathbb{N}^*$ existiert, sodass $x - \frac{1}{m} < x_{N_m}$ (denn x ist die *kleinste* obere Schranke). Wegen der Monotonie der Folge gilt aber für alle $n \geq N_m$

$$x - \frac{1}{m} < x_{N_m} \leq x_n \leq x \leq x + \frac{1}{m},$$

d.h.

$$-\frac{1}{m} < x_n - x \leq \frac{1}{m},$$

und somit gilt die erste Implikation. Die Umkehrung folgt aus der Aufgabe 5.17.

(2) Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende unbeschränkte Folge. Nach Definition ist die Menge $\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben unbeschränkt, also gibt es für alle $M \in \mathbb{N}$ ein $N_M \in \mathbb{N}$, sodass $x_{N_M} \geq M$. Wegen der Monotonie der Folge gilt aber auch $x_n \geq M$ für alle $n \geq N_M$. Die Umkehrung folgt aus der Anmerkung 5.35. □

Anmerkung 5.38. Die Folge in Beispiel 5.8 konvergiert nicht, jedoch scheint sie aus zwei zusammengesetzten Folgen zu bestehen, die jeweils konstant und somit konvergent sind. Solche (und allgemeinere) Verhaltensweisen kann man mathematisch formalisieren und die Begriffe von “Teilfolgen” und “Häufungspunkte” einführen. Wir verweisen dazu auf [**6**, § 5.4] oder [**3**, § 7.7], vgl. auch das Übungsblatt 4 zur Vorlesung.

Satz 5.39 (Rechenregel für uneigentlich konvergente Folgen). *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{R}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) uneigentlich konvergente Folge. Dann gelten die folgenden Rechenregel.*

(1) Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist uneigentlich gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) konvergent.
(2) Die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist uneigentlich gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) konvergent, falls $\lim_{n\to\infty} x_n > 0$.
(3) Die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist uneigentlich gegen $-\infty$ (bzw. $+\infty$) konvergent, falls $\lim_{n\to\infty} x_n < 0$.

Anmerkung 5.40. Im Allgemeinen kann man nichts über die Summe zweier uneigentlich gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ konvergenten Folgen sagen: z.B. ist

$$\lim_{n\to\infty}(n-n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}(2n-n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}(n-2n) = -\infty.$$

Ebenfalls gibt es keine Regel über das Verhalten des Produktes einer Nullfolge und einer uneigentlich konvergenten Folge: z.B. ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}n\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}n^2\right) = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{-n}n^2\right) = -\infty.$$

Übungsaufgabe 5.41. Beweise den Satz 5.39.

Manchmal ist es nicht nur interessant zu wissen, ob eine Folge uneigentlich konvergiert, sondern auch, *wie schnell* sie das tut. Das ist bei der Untersuchung informationstheoretischer Algorithmen oder der Komplexitätstheorie oft der Fall. Eine solche Konvergenzgeschwindigkeit (auch "asymptotisches Verhalten" genannt) wird üblicherweise durch die sogenannte *Landau-Symbole* gemessen, die 1894 von Paul Gustav Heinrich Bachmann und 1909 von Lev Davidovich Landau eingeführt wurden.

Definition 5.42. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sagt man, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***von Ordnung** b_n **ist*** *und schreibt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = O((b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ (oder manchmal einfacher $a_n = O(b_n)$), wenn die Folge $(|\frac{a_n}{b_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Auch schreibt man $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in o(b_n)$, wenn $(|\frac{a_n}{b_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.*

Übungsaufgabe 5.43. a) Zeige: Zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann, wenn $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.
b) Sei $q \in (0,1)$. Zeige: Wenn $0 < x_n$ und $x_{n+1} \leq qx_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Übungsaufgabe 5.44. Wie kann man den Satz 5.25 so umformulieren, dass er auch für uneigentlich konvergente Folgen gilt?

Übungsaufgabe 5.45. Folgere aus dem Satz 5.25, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0$.

Übungsaufgabe 5.46. Sei $q \in (0,1)$. Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Verallgemeinere diesen Grenzwert auf komplexe Zahlen.

Übungsaufgabe 5.47. Sei $I_n = [a_n, b_n]$, sodass $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei weiter $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$. Zeige: Es gibt genau ein $s \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (d.h. $s \in \mathbb{R}$ und $s \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Eine solche Intervallfolge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Intervallschachtelung.*
Zeige umgekehrt auch: Für alle $s \in \mathbb{R}$ gibt es eine Intervallenschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ und $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $s \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Übungsaufgabe 5.48. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn die Folgen $(\mathrm{Re}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\mathrm{Im}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ der Real- und Imaginärteilen konvergieren.

KAPITEL 6

Reihen

Wir betrachten erneut die Folge aus Beispiel 5.8 und fragen uns, welchen Wert die Summe aller ihrer Glieder beträgt. Im Mittelalter war dies ein beliebtes Problem, dass manche durch

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1$$

lösten. Andere dachten dagegen, dass

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0.$$

Diese und ähnliche Fragestellungen haben zur Einführung des folgenden Begriffs geführt.

Definition 6.1. *Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und setze $s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$. Dann heißt s_k die* ***k-te Partialsumme*** *von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die* ***zur Folge*** *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***assoziierte Reihe****: sie wird mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ oder $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ bezeichnet. Ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so heißt die Reihe* ***konvergent*** *und der Grenzwert dieser Folge wird ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.*
Ist die zur Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe konvergent, so heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ***absolut konvergent****.*

Beispiel 6.2. Man kann nun zeigen, dass $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$ nicht konvergiert (und insbesondere nicht gegen die Werte 0 und 1). In der Tat ist für $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 0$, also oszilliert die Folge der Partialsummen ständig und somit konvergiert sie nicht (genauer gesagt: die Folge konvergiert nicht, weil sie zwei Häufungspunkte hat. vgl. Anmerkung 5.38). □

Aufgrund der obigen Definition kann man diverse Eigenschaften von Reihen auf Eigenschaften von Folgen zurückführen.

Satz 6.3 (Rechenregel für Reihen). *Gegeben seien eine Zahl c und zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass die assoziierten Reihen gegen a bzw. b konvergieren. Dann gelten die folgenden Rechenregel.*
(1) Die zur Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe ist konvergent und $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = a + b$.
(2) Die zur Folge $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe ist konvergent und $\sum_{k=0}^{\infty}(ca_k) = ca$.

Übungsaufgabe 6.4. Beweise den Satz 6.3.

Betrachtet man Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$, so kann man leicht das Produkt der zwei Summen $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$ und $(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$ bilden. Betrachtet man jedoch zwei Folgen, so existiert das Produkt der assoziierten Reihen nicht notwendigerweise – selbst wenn beide Reihen konvergent sind! Jedoch gilt der folgende

Satz 6.5 (Cauchy–Produktformel). *Gegeben seien zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass die assoziierten Reihen konvergieren, eine davon sogar absolut. Dann konvergiert auch das Produkt der Reihen und es gilt*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right).$$

Der obige Satz geht auf Augustin Louis Cauchy zurück, der aber nur den Spezialfall *zweier* absolut konvergenten Reihen betrachtet hat (und in diesem Fall ist die Produktreihe sogar absolut konvergent). In dieser Allgemeinheit stammt der Satz von Franz Mertens.

Ein wichtiges Beispiel einer konvergenten Reihe ist im folgenden

Beispiel 6.6 (Geometrische Reihe). Sei $q \in (0,1)$. Dann konvergiert die (sog. *geometrische*) Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ gegen $\frac{1}{1-q}$, und divergiert sonst. Die n-te Partialsumme beträgt nämlich

$$s_n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

wie man direkt nachprüfen kann. Also ist nach Satz 5.19

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q},$$

weil laut Übungsaufgabe 5.46 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ gilt. Der erste Beweis der Konvergenz der geometrischen Reihe geht auf Richard Suiseht zurÃ$\frac{1}{4}$ck, vor über 600 Jahre. □

Anmerkung 6.7. Ein bekanntes Paradoxon stammt vom antiken griechischen Philosophen Zenon von Elea. Zenon stellt sich vor, der schnelle Achilles wird von einer 10 mal langsameren Schildkröte herausgefordert, eine Strecke zu laufen – allerdings unter der Bedingung, dass ihr ein Vorsprung von 10 Längeneinheiten gewährleistet wird. In der Zeit, die Achilles braucht, um den Startpunkt der Schildkröte zu erreichen wird sie wohl 1 Längeneinehit gelaufen sein; in der Zeit, die Achilles braucht, um diese Längeneinheit durchzulaufen, wird die Schildkröte weitere 1/10 Längeneinheit gelaufen sein, usw. Dieses "usw." interpretiert Zenon als die Unmöglichkeit des Achilles, die Schildkröte zu erreichen – daher das scheinbare Paradoxon. In der Tat wissen wir heute, ein solches Paradoxon lässt sich leicht lösen. Denn die von der Schildkröte gelaufene Strecke beträgt zum n. Schritt genau

$$s_n = 1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^k}$$

Längeneinheiten. Diese bildet eine geometrische Reihe, die bekanntlich gegen $\frac{10}{9}$ konvergiert. Nachdem sie $\frac{10}{9}$ Längeneinheiten gelaufen ist wird also die Schildkröte tatsächlich erreicht. Diese Lösung des Paradoxon wurde 1647 von Grégoire de Saint-Vincent gefunden.

Unser Ziel ist typischerweise, Voraussetzungen an die Glieder einer Folge zu formulieren, welche die Konvergenz der assoziierten Reihe implizieren. Aus Satz 5.29 folgt unmittelbar der nächste

Satz 6.8 (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Genau dann konvergiert die assoziierte Reihe, wenn für alle $m \in \mathbb{N}^*$ ein $N_m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass*

$$\left| \sum_{k=p}^{n} a_p \right| \le \frac{1}{m} \qquad \text{für alle } n, p \ge N_m.$$

Anmerkung 6.9. Ähnlich wie in Satz 5.24 spielen bei der Konvergenz einer Reihe die ersten endlich vielen Glieder keine Rolle: Seien $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und betrachte eine beliebige neue Folge $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $a_n = \tilde{a}_n$ für alle $n \ge \tilde{N}$. Genau dann konvergiert die zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe, wenn die zur Folge $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe konvergiert.

Beispiel 6.10. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge mit Wert c. Dann besteht die Folge der Partialsummen aus Vielfachen von c, also

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} c = (n+1)c.$$

Da diese Folge offensichtlich unbeschränkt ist, konvergiert die Reihe nicht. □

Wie das obige Beispiel zeigt, konvergiert eine Folge mit konstanten positiven Gliedern *nicht*. Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist, dass die zugehörige Folge gegen 0 konvergiert.

Satz 6.11. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Konvergiert die assoziierte Reihe, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}^*$. Dann ist die Folge der Partialsummen konvergent. Nach dem Konvergenzkriterium von Cauchy gibt es für alle $m \in \mathbb{N}^*$ ein $N_m \in \mathbb{N}$, sodass $|s_n - s_m| \leq \frac{1}{m}$ für alle $n \geq N_m$, und insbesondere

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq \frac{1}{m}$$

für alle $n \geq N_m$. □

Leider ist nicht jede zu einer Nullfolge assoziierte Reihe konvergent.

Beispiel 6.12 (Harmonische Reihe). Sei $x_n := \frac{1}{n}$. Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bekanntlich eine Nullfolge, doch konvergiert die assoziierte, sog. **harmonische Reihe** nicht. Nämlich ist

$$\begin{array}{rcllllll} s_n & = & 1+\frac{1}{2} & + & \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) & + & \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) & +\ldots+\frac{1}{n} \\ & > & 1+\frac{1}{2} & + & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) & + & \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) & +\ldots+\frac{1}{n} \\ & = & 1+\frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & +\ldots+\frac{1}{n} \end{array} \tag{6.1}$$

und somit ist s_n monoton wachsend und unbeschränkt, also konvergiert sie uneigentlich gegen $+\infty$. Dieser Beweis wurde bereits vor 600 Jahre von Nicole Oresme geliefert.

Die Divergenz der harmonischen Reihe zeigt insbesondere, dass man eine unendliche Brücke bauen könnte. Es reicht dazu, die Klötze mit einem der harmonischen Reihe entsprechenden Abstand aufeinander zu stapeln. Der gemeinsame Schwerpunkt vom 1. Klotz und 2. Klotz liegt bei $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, der vom 1. Klotz, 2. Klotz und 3. Klotz bei $\frac{1}{2}\frac{1}{3}$, der vom n. Klotz bei $\frac{1}{2}\frac{1}{n}$. Eine solche Brücke mit n Klötzen würde also bereits eine Länge von $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ haben. Wenn man über unendlich viele Klötze (etwa der Länge 1m) verfügen könnte würde man somit eine Brücke der Länge $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty$ errichten. □

Satz 6.13 (Teleskopreihen). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und betrachte die zur Folge $(a_n - a_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ assoziierte (sog. Teleskop-) Reihe. Genau dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, wenn die Reihe gegen $a - a_0$ konvergiert.*

Beweis. Die Folge der Partialsumme lautet

$$s_1 = a_1 - a_0, \qquad s_2 = a_2 - a_1 + a_1 - a_0 = a_2 - a_0,$$

und i.A.

$$s_n = a_n - (a_{n-1} - a_{n-1}) \ldots - (a_1 - a_1) - a_0 = a_n - a_0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Also gilt nach Satz 5.19: genau dann konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und in diesem Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_n - a_0,$$

was zu beweisen war. □

Beispiel 6.14. Betrachte die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, wobei $a_n := \frac{1}{n(n+1)}$. Da

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

ist die zu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ assoziierte Reihe eine Teleskopreihe und somit konvergiert sie gegen $a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1 - 0 = 1$. □

Satz 6.15 (Majorantenkriterium). *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen, sodass $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gegen ein $b \in \mathbb{R}$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, sogar absolut. Im Allgemeinen ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \neq b$. Konvergiert dennoch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ uneigentlich gegen $+\infty$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ uneigentlich gegen $+\infty$.*

Übungsaufgabe 6.16. Verallgemeinere das Resultat über die Konvergenz der geometrichen Reihe auf den komplexen Fall mit Hilfe des Majorantenkriteriums und Übungsaufgabe 5.46.

Beispiel 6.17. Betrachte die Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$, wobei $a_n := \frac{1}{n^2}$. Da

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1}\right)^2$$

und

$$0 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

ist die zu $(a_n)_{n=1}^\infty$ assoziierte Reihe nach dem Majorantenkriterium und Beispiel 6.14 konvergent. □

Beispiel 6.18. Sei $a_n := \frac{n!}{n^n}$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$, denn

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{2}{n^2}$$

für alle $n \geq 2$. □

Anmerkung 6.19. Es folgt unmittelbar aus dem Majorantenkriterium, dass jede *absolut* konvergente Reihe auch konvergent ist.

Übungsaufgabe 6.20. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen, sodass $a_n = O(b_n)$. Ist die zu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe konvergent, so ist auch die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe konvergent.

Unser Ziel ist also, hinreichende Bedingungen an eine (Null)Folge zu finden, sodass die assoziierte Reihe konvergiert. Wir werden nur zwei Kriterien formulieren, obwohl auch weitere bekannt sind, vgl. [**4**, § VI.2.II].

Satz 6.21 (Quotientenkriterium). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, sodass ein $q \in [0,1)$ existiert mit*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{6.2}$$

Dann ist die assoziierte Reihe absolut konvergent. Wenn aber ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{6.3}$$

dann ist die assoziierte Reihe gegen $+\infty$ uneigentlich konvergent.

Insbesondere folgt aus der Anmerkung 6.9, dass die Bedingungen in 6.2–6.3 durch die folgende schwächere Bedingung ersetzt werden können: es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $q \in [0,1)$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \qquad \text{für alle } n \geq N. \tag{6.4}$$

Beweis. Sei (6.2) gültig, dann gilt nach Voraussetzung $|a_{n+1}| < q|a_n|$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Andererseits gilt auch $|a_n| < q|a_{n-1}|, \ldots, |a_1| < q|a_0|$. All diese Abschätzungen zusammen liefern $|a_{n+1}| < q|a_n| < q^2|a_{n-1}| < \ldots < q^n|a_1| < q^{n+1}|a_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit ist die zur Folge $(|a_0|q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe eine Majorante der gegebenen Reihe. Da die geometrische Reihe konvergiert, folgt die Aussage aus dem Majorantenkriterium und der Rechenregel für Folgen.

Es gelte nun (6.3). Die uneigentliche Konvergenz der Reihe folgt ebenfalls aus dem Majorantenkriterium. □

Eine wichtige Anwendung des Quotientenkriterium ist folgendes

Beispiel 6.22. Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$ absolut, denn für die Folge $(\frac{z^n}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{z^n}\right| = \left|\frac{z}{n+1}\right|,$$

sodass für N groß genug (6.4) erfüllt ist. Somit ist die Reihe absolut konvergent.

Ist $z = 1$, so konvergiert diese Reihe gegen die Zahl e aus dem Beispiel 5.27. Ist $z = m \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe gegen die Potenz e^m. Im Allgemeinen ist die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. In der Tat gilt

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|},$$

wobei $|z|$ den Betrag der komplexen Zahl z bezeichnet. Dies motiviert die folgende Verallgemeinerung der Definition der Exponentialfunktion. $\square$

Definition 6.23 (Komplexe Exponentialfunktion). *Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche*

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

abbildet, ist wohldefiniert. Sie wird üblicherweise mit exp *bezeichnet und* ***(komplexe) Exponentialfunktion*** *genannt.*

Anmerkung 6.24. Wir haben in der Anmerkung 5.28 gesehen, dass die Einführung der Zahl e geht auf eine Frage des Jacob Bernoulli über Zinseszinskalkulation zurück. Diese Frage wurde von seinem Neffe Daniel Bernoulli beantwortet, der somit 1728 die Formel $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ vorgeschlagen hat. Die Reihendarstellung der Exponentialfunktion wie in Definition 6.23 wurde bereits 1669 von Sir Isaac Newton bewiesen.

Übungsaufgabe 6.25. a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Sei $q := \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvertiert (bzw. divergiert) wenn $q < 1$ (bzw. $q > 1$): dies nennt sich *Wurzelkriterium. (Hinweis: Zeige dass die Reihe absolut konvergent ist, wenn $q < 1$.)*

b) Sei

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 3^{-n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zeige mit Hilfe von a), dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Konnte das Quotientenkrierium auch angewandt werden?

Anmerkung 6.26. Man kann zeigen, dass die obige Exponentialfunktion die Gleichung

$$\exp(z)\exp(w) = \exp(z + w) \tag{6.5}$$

erfüllt, für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Zusätzlich gilt offensichtlich

$$\exp(0) = 1. \tag{6.6}$$

In der Tat sind Exponentialfunktionen (oder, genauer gesagt, Funktionen der Form $c\exp(\cdot)$ für ein $c \in \mathbb{C}$) die einzigen Abbildungen, die (6.5) erfüllen, vgl. Übungsaufgabe 8.46 für eine ähnliche Aussage. Dies wurde zuerst von Augustin Louis Cauchy erkannt.

Die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ ist die übliche (reelle) Exponentialfunktion, also ist $\exp(m) = e^m$ falls $m \in \mathbb{N}$.

Beispiel 6.27 (Trigonometrische Funktionen). Mittels der komplexen Exponentialfunktion und der wichtigen *Eulersche Identität*

$$\exp(z) = \exp(\mathrm{Re}z)\left(\cos \mathrm{Im}z + i \sin \mathrm{Im}z\right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

(die unmittelbar aus der Darstellung von $z \in \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten folgt) kann man indirekt auch die trigonometrischen Funktionen cos und sin sowie die Hyperbelfunktionen cosh und sinh auf $\mathbb{C}$ definieren bzw. erweitern: es gilt nämlich

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \cosh(ix), \qquad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = -i\sinh(ix), \qquad x \in \mathbb{R},$$

sowie

$$\cos ix = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \cosh(x), \qquad \sin ix = i\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = i\sinh(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es kann bewiesen werden, dass solche Funktion auf $\mathbb{R}$ mit den üblichen Hyperbel- sowie trigono-metrischen Funktionen übereinstimmen. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 6.28. a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, sodass $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass genau dann $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt, wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.
b) Sei $x > 0$. Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x^n} = +\infty$. *(Hinweis: Wende a) an und benutze, dass die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *konvergiert.)*

Das folgende Kriterium wird nicht bewiesen. Sein Beweis beruht auf dem Begriff der Teilfolge, welcher in der Übungsaufgabe 12.22 eingeführt wird, vgl. [**4**, § 6.2].

SATZ 6.29 (Leibniz-Kriterium). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, so konvergiert die (sog. alternierende) Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Ist a der Grenzwert der Reihe, so erfüllt die n-te Partialsumme die Abschätzung $|a - s_n| \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

BEISPIEL 6.30 (Alternierende geometrische Reihe). Sei $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$. Dann erfüllt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ die Bedingungen des Leibniz-Kriteriums und somit konvergiert die assoziierte (alternierende) Reihe. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 6.31. Sind die folgende Reihen konvergent oder divergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{4n^4 - 3n + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{9^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2 - n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{3n^2}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 6.32. Sei $z_0 \geq 0$ eine ganze Zahl und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine Folge von Zahlen aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Man definiert $a_n := z_0 + \frac{z_1}{10} + \ldots + \frac{z_n}{10^n}$ und schreibt $a_n = z_0, z_1 z_2 \ldots z_n$. Zeige
(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent,
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, falls $z_0 = 0$ und $z_n = 9$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(3) $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{Q}$, falls $n_0, p \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $z_{n+p} = z_n$ für alle $n \geq n_0$.
Sei nun $a \geq 0$ beliebig. Finde eine ganze Zahl z_0 und eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$, sodass $a = \lim_{n\to\infty}(z_0, z_1 \ldots z_n)$. Mann nennt $(z_0, z_1 \ldots z_n)$ die *Dezimalbruchzerlegung* von a. Ist sie eindeutig?

BEISPIEL 6.33. Sei $x \in [0, 10)$. Ihre Darstellung als Dezimalzahl kann man als

$$x = x_0, x_1 x_2 \ldots,$$

hinschreiben, wobei $x_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Äquivalent kann man sie auch in Reihenform darstellen, also

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}.$$

Diese Reihe konvergiert tatsächlich, denn sie wird durch die Reihe

$$9 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

majorisiert, welche eine (konvergente) geometrische Reihe ist.
Die Darstellung lässt sich leicht auf allgemeine reelle Zahlen verallgemeinern, indem man $x_0 \in \mathbb{Z}$ zuläßt. $\square$

ANMERKUNG 6.34. Sei $x_0 = \ldots = x_{m-1} = 0$. Manchmal benutzt man (und Rechner sowieso) die sog. *Exponentialschreibweise*: der entsprechend ist

$$x_0, x_1 x_2 \ldots x_{m-1} x_m x_{m+1} \ldots \equiv (x_m, x_{m+1} x_{m+2} \ldots E\ -m).$$

Z.B. schreibt man die Zahl $0,015$ äquivalent als $(1,5E\ -2)$. Allgemeiner schreibt man

$$\ldots x_{-2}x_{-1}x_0, x_1x_2\ldots x_mx_{m+1}\ldots \equiv (x_{-q}, x_{-q+1}\ldots E\ q),$$

falls $x_n = 0$ für alle $n < -q$, z.B. $13,2 \equiv (1,32E\ 1)$. Allgemeiner heißt also die Schreibweise

$$(y_0, y_1y_2\ldots E\ n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_i}{10^{k-n}}.$$

Beispiel 6.33 zeigt, wie die formelle Umschreibung einer reeller Zahl in Dezimaldarstellung erfolgt. Man kann sich allerdings fragen, ob es notwendig ist, dass die Zahlen x_i Elemente der Menge $\{0,\ldots,9\}$ sind. In der Tat ist dies nicht der Fall: Jede strikt positive Natürliche Zahl p eignet sich für eine solche Darstellung und man spricht vom *p-adischem Zahlensystem*. In der Geschichte kann man Beispiele von Kulturen finden, welche z.B. 12-, 20-, oder 60-adische Zahlensysteme benutzt haben. In dem (heutzutage wichtigsten) Fall von $p = 2$ geht die Intuition eines solchen alternativen, sog. *binären*, Zahlensystems auf Gottfried Leibniz zurück. Er erfand es 1679 bei seinem Entwurf einer Rechenmaschine. Die Hauptmotivation, um das binäre System einzuführen ist tatsächlich die Leichtigkeit, mit der Multiplikationen durchgeführt werden können, vgl. [**1**, § 1.3] für das Beispiel der Berechnung eines konkreten Produktes im binären System.

Den nächste Satz formulieren wir ohne Beweis. Mehr zum Thema Zahlensystem findet man in [**3**, § 13.3].

Satz 6.35 (Eindeutigkeit der p-adischen Darstellung). *Sei $x \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{N}^*$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, sodass $x_n \in \{0,\ldots,p-1\}$ und*

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{p^k}.$$

Nur endlich viele Glieder mit negativem Index verschwinden nicht und somit ist die Reihe dank dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe konvergent.

Definition 6.36. *Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt **p-adische Darstellung** von x. Sind die Zahlen $x_n = 0$ für alle $n < q$, so schreibt man*

$$x = (x_q, x_{q+1}\ldots E\ -q)_p.$$

Beispiel 6.37. Es gilt $8 = (1E\,3)_2 = (1,1E\,1)_6$. □

KAPITEL 7

Elemente von Topologie des $\mathbb{R}^N$

In diesem Kapitel möchten wir manche topologische Grundbegriffe erläutern: die von abgeschlossener, offener, und kompakter Mengen. Wir schränken uns an den relevanten Fall des $\mathbb{R}^N$, der Menge aller N-Tupel von reellen Zahlen ein, wobei $N \in \mathbb{N}^*$. Im Folgendem wird die **Norm** eines Elements $x \in \mathbb{R}^N$ ist für $N \in \mathbb{N}^*$ durch

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}$$

definiert. Selbstverstänlich stimmt die Norm $\|x\|$ mit dem Betrag $|x|$ überein, falls $x \in \mathbb{R}$. Somit kann man den Begriff von Beschränktheit einführen.

Definition 7.1. *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ heißt beschränkt, falls ein $M > 0$ existiert, sodass $\|x\| \leq M$ für alle $x \in A$.*

Beispiel 7.2. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^N$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^N$, die *ε-Umgebung* von x_0 genannt wird. Sie ist beschränkt mit Schranke $\|x_0\| + \varepsilon$. $\square$

Beispiel 7.3. Betrachte $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1$ und $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0\}$. Dann ist M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, mit Schranke $M = 1$. Wie sieht sie aus? $\square$

Beispiel 7.4. Die Teilmenge $\mathbb{R}^N_+ := \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N \geq 0\}$ ist unbeschränkt, denn für $M > 0$ beliebig groß erfüllt z.B. $m := (M, \ldots, M)$ die Ungleichung $\|m\| > M$. $\square$

Um abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ definieren zu können muss man den Begriff von Konvergenz für Folgen in $\mathbb{R}^N$ erweitern.

Definition 7.5. *Sein $N \in \mathbb{N}^*$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, sodass $x_n \in \mathbb{R}^N$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann Dann sagt man, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **gegen $\tilde{x}$ konvergiert**, falls für alle $m \in \mathbb{N}^*$ ein Index $N_m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\|x_n - \tilde{x}\| \leq \frac{1}{m}$ für alle größere Indizes $n \geq N_m$. In diesem Fall schreibt man $\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$ und $\tilde{x}$ heißt **Grenzwert** der Folge. Existiert der Grenzwert einer Folge, so heißt sie **konvergent**.*

Übungsaufgabe 7.6. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{Nn}) \in \mathbb{R}^N$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $\tilde{x}$ konvergiert, wenn die Folgen $(x_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\tilde{x}_1$ *und* $\ldots$ *und* $(x_{Nn})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\tilde{x}_N$ konvergiert.

Die Resultate von Kapitel 5 über Folgen, welche die Anordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$ *nicht* brauchen (etwa die Sätze 5.11, 5.16, 5.19) gelten wortlich auch für Folgen mit Werten in $\mathbb{R}^N$.

Übungsaufgabe 7.7. Konvergiert die Folge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$? Und die Folge $(\frac{1}{n}, n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Definition 7.8. *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^N$ heißt **abgeschlossen**, falls der Grenzwert jeder konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (mit $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{Nn}) \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$) in A liegt.*
*Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^N$ heißt **offen**, falls ihr Komplement $\mathbb{R}^N \setminus A$ abgeschlossen ist.*

Die mathematische Theorie der offenen und abgeschlossenen Mengen heißt *Topologie*, und wird in diesem Kapitel nur skizziert.

Beispiel 7.9. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist nicht abgeschlossen, denn es gibt irrationale Zahlen (wie z.B. e, s. Satz 5.27) die als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen dargestellt werden können.

(In der Tat gilt mehr: *jede* irrationale Zahl lässt sich als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen darstellen: man sagt dazu $\mathbb{Q}$ ist *dicht* in $\mathbb{R}$.) □

Übungsaufgabe 7.10. Zeige:
(1) Die Vereinigung unendlich vieler offenen Mengen M_n, $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Menge der Elementen, die zu jeder Menge M_i gehören, ist offen.
(2) Der Durschnitt endlich vieler offenen Mengen $M_1, \ldots, M_N$, d.h. die Menge der Elementen, die mindestens zu einer Menge M_i gehören, ist offen.
(3) Es gibt unendlich viele offene Mengen, deren Durchschnitt nicht offen ist.

Übungsaufgabe 7.11. Zeige:
(1) Der Durchschnitt unendlich vieler abgeschlossenen Mengen M_n, $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Menge der Elementen, die mindestens einer Menge M_i gehören, ist abgeschlossen.
(2) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossenen Mengen $M_1, \ldots, M_N$, d.h. die Menge der Elementen, die jeder Menge M_i gehören, ist abgeschlossen.
(3) Es gibt unendlich viele abgeschlossene Mengen, deren Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

Beispiel 7.12. Jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ ist offen. Sei nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, deren Glieder in dem Komplement von $U_\varepsilon(x_0)$ liegen. Nimm an, ihr Grenzwert $\tilde{x}$ liegt jedoch in $U_\varepsilon(x_0)$, also $\|\tilde{x} - x_0\| < \varepsilon$ und somit existiert $\tilde{\varepsilon}$ mit $U_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{x}) \subset U_\varepsilon(x_0)$. Nach Definition von Grenzwert (und Anmerkung 5.15) gibt es dann $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|\tilde{x} - x_n\| < \tilde{\varepsilon}$. d.h., sodass $x_n \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{x}) \subset U_\varepsilon(x_0)$ für alle $n \geq N$. Somit liegt aber x_n für $n \geq N$ in der Menge $U_\varepsilon(x_0)$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass x_n nach Voraussetzung in dem Komplement von $U_\varepsilon(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ liegt. Eine ε-Umgebung ist auch nicht abgeschlossen: warum? □

Beispiel 7.13. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $a < b$. Dann ist das offene Intervall (a, b) *offen im Sinne der Definition 7.8.* Nämlich kann man (a, b) als 1-dimensionale Umgebung $U_{\frac{b-a}{2}}(\frac{a+b}{2})$ darstellen, und somit folgt die Aussage aus Beispiel 7.12. Auch gilt: jedes offene unbeschränkte Interval in $\mathbb{R}$ ist *offen im Sinne der Definition 7.8.* □

Übungsaufgabe 7.14. Zeige: Jedes (beschränkte oder unbeschränkte) abgeschlossene Intervall in $\mathbb{R}$ ist eine abgeschlossene Menge. Die Umkehrrichtung gilt nicht: finde ein Gegenbeispiel.

Beispiel 7.15. Die Menge M aus Beispiel 7.3 ist abgeschlossen. Sei $(x_{1n}, x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$ konvergente Folge, deren Glieder in M liegen. Es gilt also $x_{1n} \geq 0$, $x_{2n} \geq 0$ und $x_{1n}^2 + x_{2n}^2 \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da alle Glieder x_{1n} und x_{2n} positiv sind, müssen auch $\tilde{x_1}, \tilde{x_2}$ positiv sein: Damit sie beliebig nah an $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$ rankommen würden sonst (etwa wie im obigen Beispiel) unendlich viele Folgenglieder $x_{1n} < 0$ und $x_{2n} < 0$ erfüllen, ein Widerspruch. Sei $\tilde{x_1}^2 + \tilde{x_2}^2 = 1 + \varepsilon$, so gibt es nach Definition von Grenzwert und Anmerkung 5.15 ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\|\tilde{x_1} - x_{1n}\| - \|\tilde{x_2} - x_{2n}\| \leq \|(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) - (x_{1n}, x_{2n})\|^2 = (\tilde{x_1} - x_{1n})^2 + (\tilde{x_2} - x_{2n})^2 < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit notwendigerweise ${x_{1n}}^2 + {x_{2n}}^2 > 1$, ein Widerspruch zur Annahme, dass $(x_{1n}, x_{2n}) \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Übungsaufgabe 7.16. Zeige: Die Menge aus Beispiel 7.4 ist abgeschlossen.

Anmerkung 7.17. Es sollte schon aus der Definition 7.8 klar sein, aber besser ist es dies explizit zu bekräftigen:
- *Eine Menge kann gleichzeitig offen und abgeschlossen sein;*
- *Eine nichtoffene Menge ist nicht notwendigerweise abgeschlossen;*
- *Eine nichtabgeschlossene Menge ist nicht notwendigerweise offen.*

Zum Beispiel erfüllen sowohl die leere Menge als auch $\mathbb{R}^N$ offensichtlich die Definition einer abgeschlossener Menge und sind somit beide sowohl offen als auch abgeschlossen. Das Intervall $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ ist jedoch weder offen noch abgeschlossen.

Definition 7.18. *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ heißt **kompakt**, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beispiel 7.19. Jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(\tilde{x})$ ist nicht abgeschlossen: z.B. konvergiert die Folge

$$\left(\tilde{x} + (\varepsilon - \frac{1}{n}, 0, \ldots, 0)\right)_{n \geq \tilde{N}} \quad \text{gegen} \quad (\tilde{x}_1 + \varepsilon, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N) \notin U_\varepsilon(\tilde{x}),$$

wobei $\tilde{N}$ eine natürliche Zahl bezeichnet, die groß genug ist, dass alle Glieder in $U_\varepsilon(\tilde{x})$ liegen. Somit sind ε-Umgebungen auch nicht kompakt. □

Übungsaufgabe 7.20. Ist $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, so sind ihr Supremum bzw. Infimum auch Maximum bzw. Minimum.

Beispiel 7.21. Die Menge aus dem Beispiel 7.3 ist kompakt. □

Beispiel 7.22. Die Menge aus dem Beispiel 7.4 ist nicht kompakt. □

Anmerkung 7.23. Obwohl die algebraische Struktur von $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ unterschiedlich sind, die Norm eines Elements in beiden Räumen gleich definiert. Ist nämlich $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $x = (\mathrm{Re}x, \mathrm{Im}x) \in \mathbb{C}$, so ist ihre Norm $\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$ bzw. $\|x\| = \sqrt{(\mathrm{Re}x)^2 + (\mathrm{Im}x)^2}$. Somit sind die *topologischen* Eigenschaften von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ gleich: genauer gesagt ist jede Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ genau dann beschränkt/abgeschlossen/offen/kompakt, wenn $\tilde{A} := \{(\mathrm{Re}x, \mathrm{Im}x) \in \mathbb{C} : (x_1, x_2) := (\mathrm{Re}x, \mathrm{Im}x) \in A\}$ beschränkt/abgeschlossen/offen/kompakt ist.

Der Begriff von Teilfolge wird in der Übungsaufgabe 12.22 eingeführt. Er erlaubt uns jetzt eine wichtige Charakterisierung der kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^N$ zu formulieren (ohne Beweis).

Satz 7.24. *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge besitzt, welche gegen einen $x \in A$ konvergiert.*

KAPITEL 8

Stetige Funktionen

Den Begriff einer Funktion haben wir bereits im Kapitel 2 eingeführt, wobei allgemeine Funktionen (d.h., Funktionen zwischen zwei beliebigen Mengen) recht wenige Eigenschaften haben, sodass ihre abstrakte Theorie ziemlich arm ist. Plötzlich ist alles anders, wenn wir uns auf *numerische* Funktionen einschränken.

Der Einfachheit halber führen wir die Definition von Stetigkeit gleich auch im komplexen Fall ein. Vorsicht! Wir betrachten nur den einfacheren Fall einer Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (obwohl sie möglicherweise auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ definiert werden könnte). Es ist besonders wichtig, dass der sog. *Wertebereich* $f(A)$ einer Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist und somit kann man die Begriffe und die Theorie des vorigem Kapitels anwenden.

Definition 8.1. *Sei $A \subset \mathbb{R}^N$. Sei $f : A \to \mathbb{C}$. Man sagt, dass f gegen $y \in \mathbb{C}$ für x gegen $x_0 \in \mathbb{R}^N$ konvergiert (x_0 nicht notwendigerweise Element von A!), falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $|f(x) - y| \leq \varepsilon$ sobald $x \in A$ und $\|x - x_0\| < \delta$. Man schreibt dann $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. In diesem Fall heißt y* ***Grenzwert von f für x gegen*** *x_0.*

Obwohl Analysis bereits in 17. Jahrhundert vergleichsmässig reif war, wurde der moderne Begriff von Konvergenz von Funktionen erst von Karl Weierstraß am Ende des 19. Jahrhunderts formuliert.

Die obige Definition kann offensichtlich auch für den Fall einer Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ mit $A \subset \mathbb{C}$ ähnlich eingeführt werden.

Der Vollständigkeit halber definieren wir auch den Begriff von uneigentlicher Konvergenz, falls die Zielmenge einer Funktion $\mathbb{R}$ ist.

Definition 8.2. *Sei $A \subset \mathbb{R}^N$. Sei $f : A \to \mathbb{R}$. Man sagt, dass f gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) für x gegen $x_0 \in \mathbb{R}^N$ konvergiert (x_0 nicht notwendigerweise Element von A!), falls für alle $M > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $f(x) > M$ (bzw. $f(x) < -M$) sobald $x \in A$ und $\|x - x_0\| < \delta$. Man schreibt dann $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (bzw. $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).*

Beispiel 8.3. Die identische Funktion $f : \mathbb{C} \ni x \mapsto x \in \mathbb{C}$ konvergiert gegen y für x gegen jedes y. $\square$

Beispiel 8.4. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Die konstante Funktion $f : \mathbb{C} \ni x \mapsto \alpha \in \mathbb{C}$ konvergiert gegen α für x gegen jedes y. $\square$

Beispiel 8.5. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

definiert wird. Dann konvergiert f *nicht* gegen 0, für x gegen 0. Sei nämlich $\varepsilon = 1$, dann gibt es für δ beliebig klein stets ein $x \in \mathbb{R}$ so, dass $|x - 0| < \delta$ und dennoch $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \frac{1}{|x|} \geq 1$. $\square$

Satz 8.6. *Sei $A \subset \mathbb{R}^N$. Dann ist eine Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ genau dann gegen y für x gegen x_0 konvergent, wenn $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$ für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei f gegen y konvergent, für x gegen x_0, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge. Laut Anmerkung 5.15 reicht es zu zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $|f(x_n) - y| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Sei also $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es $\delta > 0$ so, dass

$$x \in A \text{ und } \|x - x_0\| < \delta \quad \text{impliziert} \quad |f(x) - y| < \varepsilon. \tag{8.1}$$

Da aber $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, nach Definition von Konvergenz (bzw. laut Anmerkung 5.15) gibt es also für das obige $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\|x_n - x_0\| < \delta \quad \text{für alle } n \geq N. \tag{8.2}$$

Wegen (8.1) und (8.2) gilt also: Es gibt für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f(x_n) - y| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N, \tag{8.3}$$

was zu zeigen war.

Sei umgekehrt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ aber gelte die Konvergenzbedingung nicht, also gebe es für alle $\delta > 0$

- $x \in A$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ und dennoch
- $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Insbesondere gebe es also für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass x_n erfüllt $\|x - x_n\| < \frac{1}{n} := \delta$ – und somit werde eine gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gebildet – aber auch $|y - f(x_n)| \geq \varepsilon$ – und somit keine gegen y konvergente Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Es ist wie üblich möglich, Rechenregel zu beweisen, welche die Überprüfung der Konvergenz vereinfachen.

Satz 8.7 (Rechenregel für Konvergenz von Funktionen). *Sei $A \subset \mathbb{R}^N$. Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : A \to \mathbb{C}$, welche gegen y_0 bzw. z_0 für x gegen x_0 konvergieren. Dann gelten die folgenden Rechenregel.*

(1) Die Funktion $(f + g)$ konvergiert gegen $y_0 + z_0$ für x gegen x_0, wobei

$$(f + g) : x \mapsto f(x) + g(x), \qquad x \in A.$$

(2) Die Funktion $(f \cdot g)$ konvergiert gegen $y_0 z_0$ für x gegen x_0, wobei

$$(fg) : x \mapsto f(x)g(x), \qquad x \in A.$$

(3) Ist $g(x) \neq 0$ für alle x in einer ε-Umgebung von x_0 und ist $z_0 \neq 0$, so konvergiert die Funktion $\frac{f}{g}$ gegen $\frac{y_0}{z_0}$ für x gegen x_0, wobei

$$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in A.$$

(4) Sei zusätzlich $B \subset \mathbb{C}$ und $h : B \to \mathbb{C}$ so, dass $y_0 \in B$. Konvergiert auch h gegen w_0 für y gegen y_0, so konvergiert $h \circ f$ gegen w_0 für x gegen x_0, wobei

$$(h \circ f) : x \mapsto h(f(x)), \qquad x \in A.$$

Beweis. (1) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es δ_1, δ_2 so, dass $|f(x) - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|g(x) - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta_1$ bzw. $|x - x_0| < \delta_2$. Sei nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, so gilt

$$|(f + g)(x) - (y_0 + z_0)| \leq |f(x) - y_0| + |g(x) - z_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle x so, dass $|x - x_0| < \delta$.

(4) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es η_1 so, dass $|h(y) - w_0| < \varepsilon$ für alle $y \in B$ mit $|y - y_0| < \eta_1$. Sei zusätzlich $\eta_2 > 0$ so, dass die Umgebung $U_{\eta_2}(y_0) \subset B$ und setze $\eta := \min\{\eta_1, \eta_2\}$. Zu diesem η gibt es nun $\delta > 0$, sodass $f(x) \in B$ und $|f(x) - y_0| < \eta$ für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$. Insgesamt gilt für alle $x \in A$ so, dass $|x - x_0| < \delta$, auch $|f(x) - y_0| < \eta$ und somit $|(h \circ f)(x) - w_0| = |h(f(x)) - w_0| < \varepsilon$. □

Übungsaufgabe 8.8. Führe den Beweis vom Satz 8.7.(2)–(3) durch.

Übungsaufgabe 8.9. Bestimme

(1) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \frac{1}{x-1} \right)$;

(2) $\lim_{x\to a}\frac{x^n-1}{x^m-1}$, in Abhängigkeit von $n,m\in\mathbb{N}$ und $a\in\mathbb{R}$.

Anmerkung 8.10. Die Funktion $h\circ f$ heißt *Verkettung* von f und h. Achtung: die Bedingung $f(A)\subset B$ ist nötig, damit man die verkettete Funktion überhaupt definieren kann.

Wir können jetzt den Begriff einer stetigen Funktion einführen. Anschaulich bezeichnet Stetigkeit die Eigenschaft einer Funktion, einen sprungfreien Graph zu haben. Genauer gesagt

Definition 8.11. *Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ und $x_0\in A$. Dann heißt eine Funktion $f:A\to\mathbb{C}$ **in** x_0 **stetig**, falls sie gegen $f(x_0)$ für x gegen x_0 konvergiert. Sie heißt **in** A **stetig** (oder einfach **stetig**), falls sie in jedem $x_0\in A$ stetig ist.*

Anmerkung 8.12. Es gibt mehrere Gründe, warum eine Funktion in einem x_0 unstetig ist. Man kann in der Tat Unstetigkeitspunkte einer Funktion klassifizieren. Wir verzichten darauf und verweisen auf [**1**, § VI.1.5].

Beispiel 8.13. Laut Beispiel 8.3 ist die identische Funktion stetig $x\mapsto x$ auf $\mathbb{C}$. ☐

Beispiel 8.14. Sei $\alpha\in\mathbb{C}$. Laut Beispiel 8.4 ist die konstante Funktion $x\mapsto\alpha$ stetig auf $\mathbb{C}$. ☐

Übungsaufgabe 8.15. Zeige: Ist eine Funktion f in A stetig, so ist sie auch in jeder Teilmenge $\tilde{A}$ von A stetig.

Übungsaufgabe 8.16. Zeige: Eine numerische Folge, also eine Funktion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, ist immer stetig.

In folgendem Satz wird eine wichtige äquivalente Bedingung für die Stetigkeit einer Funktion formuliert.

Satz 8.17. *Sei A eine offene Menge von $\mathbb{R}^N$. So ist $f:A\to\mathbb{C}$ genau dann in $x_0\in A$ stetig, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Glieder in A liegen, auch $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$ gilt.*

Beweis. Sei $x_0\in A$ und $f:A\to\mathbb{C}$. Nach Definition ist f in x_0 stetig, wenn $\lim_{n\to\infty}f(x)=f(x_0)$ und das ist nach Satz 8.17 genau dann der Fall, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Glieder in A liegen, auch $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$ gilt. ☐

Das obige Kriterium läßt sich kaum im *positiven* Beweisen der Stetigkeit einer Funktion anwenden, doch ist es sehr geeignet, um zu überprüfen, dass eine Funktion *nicht* stetig ist.

Beispiel 8.18 (Dirichletfunktion). Definiere eine Funktion $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{falls } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{falls } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}.$$

Sowohl $\mathbb{Q}$ als ihr Komplement in $\mathbb{R}$ sind unendliche Mengen, doch sind wie bereits bekannt die irrationalen Zahlen "mehr" als die rationalen, denn $\mathbb{Q}$ ist eine abzählbare Menge. Möchte man also den Graph von D skizzieren sollte man der Funktion D unendlich oft den Wert 1 zuordnen, doch nur in der "absoluten Minderheit" der Stellen im Definitionsbereich. Ist D stetig? Nein, D ist nicht stetig, und sogar stetig in *keinem* Element ihres Definitionsbereichs: denn man kann jede Zahl x mit (mindestens) zwei verschiedenen Folgen annähern, welche jeweils aus nur rationalen bzw. nur irrationalen Zahlen bestehen. In deren Folgenglieder ausgewertet wäre dann die Funktion D identisch 1 bzw. 0 und würde somit auch gegen 1 bzw. 0 konvergieren, was der Bedingung in Satz 8.17 widerspricht.

Die Funktion D wird oft *Dirichletfunktion* nach Peter Gustav Lejeune Dirichlet genannt.

Eine Variante der Dirichletfunktion ist die sogenannte *Popcorn-Funktion* $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, welche von Carl Johannes Thomae eingeführt wurde. Sie wird durch

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{falls } x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q} \text{ in gekürzter Form,}\\ 0 & \text{falls } x\notin\mathbb{Q},\end{cases}$$

definiert. Man kann zeigen, dass P in jeder irrationaler Zahl unstetig und in jeder rationaler Zahl stetig ist.

(Umgekehrt kann es keine Funktion geben, welche in jeder rationaler Zahl unstetig und in jeder irrationaler Zahl stetig ist, vgl. `http://en.wikipedia.org/wiki/Thomae's_function#Follow-up`.) □

In Definition 6.23 haben wir bereits die komplexe Exponentialfunktion eingeführt, mittels der auch die trigonometrischen und hyperbolische Funktionen definiert werden können, vgl. Beispiel 6.27. Nun zeigen wir, dass sie stetig ist.

Satz 8.19. *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig.*

Beweis. Wir werden erst zeigen, dass exp in 0 stetig ist, und werden dann den allgemeinen Fall betrachten. Wir merken zuerst, dass nach Definition

$$\begin{aligned} |\exp(z) - \exp(0)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \\ &\leq |z| \sum_{k=1} \frac{|z^{k-1}|}{k!} \leq |z| \sum_{k=1} \frac{|z|^{k-1}}{(k-1)!}, \end{aligned}$$

also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt wohl $|\exp(z) - \exp(0)| \leq |z| \exp(1)$. Mit einem dem Sandwichsatz für Folgen ähnlichen Argument impliziert dies, dass $\lim_{z\to 0} |\exp(z) - \exp(0)| = 0$, also $\lim_{z\to 0} \exp(z) = \exp(0)$ und exp ist in 0 stetig.
Sei nun $w \in \mathbb{C}$ und betrachte eine Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jede gegen w konvergente Folge ist tatsächlich von der Form $(w + x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist dank (6.5) und der Stetigkeit der Exponentialfunktion in 0

$$\lim_{n\to\infty} \exp(w + x_n) = \exp(w) \lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(w) \exp(0) = \exp(w),$$

also ist exp auch in w stetig. □

Übungsaufgabe 8.20. Betrachte die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{falls } x \neq 1, \\ 3 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Zeige, dass die Funktion auf $\mathbb{R}$ nicht stetig ist. Kann man die Definition der Funktion in $x = 1$ so ändern, dass die dementsprechend modifizierte Funktion stetig auf $\mathbb{R}$ wird?

Wir werden die folgende Definition brauchen.

Definition 8.21. *Sei* A *Teilmenge von* $\mathbb{R}$. *Eine Funktion* $f : A \to \mathbb{R}$ *heißt* ***monoton wachsend*** *(bzw.* ***fallend****), falls* $f(x) \geq f(y)$ *(bzw.* $f(x) \leq f(y)$*) für alle* $x \geq y$. *Sie heißt* ***streng monoton wachsend*** *(bzw.* ***fallend****), falls* $f(x) > f(y)$ *(bzw.* $f(x) < f(y)$*) für alle* $x > y$.

Anmerkung 8.22. Andere wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion sollten erwähnt werden:

- Für reelle Argumente nimmt die Exponentialfunktion reelle Werte an, als konvergente Reihe mit reellen Summanten.
- Die Einschränkung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend. Zum Beweis davon, muss man nur merken, dass Monotonie einer Funktion f dazu äquivalent ist, dass $\frac{f(x+h)}{f(x)} > 1$ für alle $x, x+h$ im Definitionsbereich von f, sodass $h > 0$. In der Tat folgt aus $\exp(x+h) = \exp(x)\exp(h)$, dass

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \exp(h) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} > 1.$$

- In der Tat ist $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Denn $\exp(0) = 1$ und somit $\exp(x) > 1$ für alle $x > 0$ aufgrund der Monotonie. Nun folgt aus (6.5), dass $\exp(y)^{-1} = \exp(-y)$ und somit ist für alle $y < 0$
$$\exp(y) = \frac{1}{\exp(-y)} > 0,$$
da $-y > 0$.

Beispiel 8.23. Sei A eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und betrachte die sog. **charakteristische Funktion von** A, d.h. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $f(x) = 1$ falls $x \in A$ und $f(x) = 0$ sonst. Dann ist f in $a := \sup\ A$ unstetig. Denn für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und alle $\delta > 0$ gilt wenn $a \in A$ (bzw. wenn $a \notin A$)
$$|f(a) - f(y)| = 1 > \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } y \in (a, a+\delta) \text{ (bzw. für alle } y \in (a-\delta, a)).$$
Ähnlich zeigt man, dass f auch in $b := \inf\ A$ unstetig ist. □

Nach Definition von Stetigkeit einer Funktion sowie der Rechenregel aus Satz 8.7, kann man die folgenden unmittelbar beweisen.

Satz 8.24 (Rechenregel für stetige Funktionen). *Sei $A \subset \mathbb{R}^N$. Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : A \to \mathbb{C}$, welche in $x_0 \in A$ stetig sind. Dann gelten die folgenden Rechenregel.*

(1) Die Funktion $(f + g)$ ist in x_0 stetig.
(2) Die Funktion $(f \cdot g)$ ist in x_0 stetig.
(3) Ist $g(x) \neq 0$ für alle x in einer ε-Umgebung von x_0, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig.
(4) Sei zusätzlich $\eta > 0$ so, dass $f(A) \subset U_\eta(f(x_0))$ ist. Ist $h : U_\eta(f(x_0)) \to \mathbb{C}$ in $f(x_0)$ stetig, so ist die Funktion $h \circ f$ in x_0 stetig.

Anmerkung 8.25. Vorsicht! Während jede Summe und jedes Produkt zweier stetigen Funktionen stetig (vgl. Satz 8.24.(2)) ist, kann das Produkt zweier unstetigen Funktionen auch stetig sein: betrachte z.B. die Dirichletfunktion D aus dem Beispiel 8.18. Dann sind D und offensichtlich auch $1 - D : x \mapsto 1 - D(x)$ unstetig, doch sind $D + (1 - D)$ sowie $D(1 - D)$ stetig: die erste ist die Funktion mit konstantem Wert 1, die zweite ist die Funktion mit konstantem Wert 0. Sie sind somit auf $\mathbb{R}$ stetig.

Beispiel 8.26. Es folgt aus dem Beispiel 8.13 und dem Satz 8.24.(2), dass auch die Potenzfunktion $x \mapsto x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{C}$ stetig ist. Allgemeiner folgt aus den obigen Rechenregeln: für alle $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ definiert das Polynom $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$ vom Grad n eine auf $\mathbb{C}$ stetige Funktion. Weiter gilt: für alle $\beta_0, \ldots, \beta_m$ ist die sogenannte *rationale Funktion*
$$x \mapsto \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n}{\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m}$$
auf $\mathbb{C} \backslash D$ stetig, wobei D die Vereiningung der (höchstens m) komplexen Nullstellen des Polynoms $\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m$ ist, welche nach dem Fundamentalsatz der Algebra existieren. Dabei darf $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden. □

Anmerkung 8.27. Sei f eine Funktion mehreren Variablen, welche aber nur von einer Variable x_{n_0} explizit abhängt, wie z.B. die Funktion $f : (x, y) \mapsto 2y$. Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn nur ihre Abhängigkeit von x_{n_0} stetig ist.
Betrachte nun eine Funktion g von n Variablen, welche sich als Summe, Produkt oder Verkettung von n Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *einer* Variablen darstellen lässt, wie z.B. $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$. Sind dann alle Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ stetig, so ist auch f stetig.

Übungsaufgabe 8.28. Betrachte die Funktion f, die durch
$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y = 0, \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sonst,} \end{cases}$$
definiert wird. Zeige, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist, und dass jedoch $f(\cdot, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ stetig ist, sowie $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 8.29. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch
$$f(x_1, x_2) := \frac{x_1 x_2}{2}$$
definiert wird, konvergiert gegen $\frac{y_1 y_2}{2}$ für (x_1, x_2) gegen jedes (y_1, y_2). So liefert $f(x_1, x_2)$ bekanntlich den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn man mit x_1, x_2 die Länge seiner Katheten bezeichnet. Diese Funktion ist also stetig. $\square$

Beispiel 8.30. Die sogenannte *Zustandsgleichung* ist das Gesetz, welches das Volumen V eines idealen Gases in Abhängigkeit von Druck p, Masse m und Temperatur T beschreibt. Sie lautet
$$V(p, m, T) = R\frac{mT}{p},$$
wobei $R \simeq 8,314472$ die universelle Gaskonstante ist. Laut Anmerkung 8.27 ist diese Funktion stetig. $\square$

Beispiel 8.31. Wie bereits im Beispiel 6.27 antizipiert definieren wir die komplexen trigono-metrischen Funktionen *cosinus* und *sinus* durch
$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \qquad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \qquad z \in \mathbb{R}.$$
Es ist unmittelbar klar, dass die Abbildung $z \mapsto iz$ auf $\mathbb{C}$ stetig ist, und somit auch ihre Verkettung $z \mapsto \exp(iz)$ mit der Exponentialfunktion. Schließlich folgt aus der Rechenregel im Satz 8.24.(1), dass auch cos und sin auf $\mathbb{C}$ stetig sind. Wie im Beispiel 6.27 erklärt stimmen die komplexen mit den üblichen, geometrisch motivierten (reellen) trigonometrischen Funktionen überein, falls das Argument z reell ist. Übrigens erlaubt die Definition dieser Funktionen auch eine Darstellung als Reihen, auf Basis der entsprechender Reihendarstellung der Exponentialfunktion: somit gilt
$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$
sowie
$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$
Dies zeigt unmittelbar, dass cos eine gerade Funktion ist und sin eine ungerade Funktion, d.h. $\cos(-z) = \cos(z)$ bzw. $\sin(-z) = -\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Seien $f, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Funktionen. Das Problem, eine Funktion g zu finden, welche die Gleichung $f + g = h$ oder $f \cdot g = h$ (im Sinne vom Satz 8.7) erfüllt, ist leicht: die Lösung ist die Funktion g, welche durch $g(x) = h(x) - f(x)$ bzw. (falls $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}$) $g(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$ definiert ist. I.A. viel schwieriger ist das Problem, ob die Gleichung $f \circ g = h$ eine Lösung hat, also ob man eine Funktion g finden kann, deren Verkettung mit f die Funktion h liefert.

Definition 8.32. *Seien $A, B \subset \mathbb{C}$ und $f : A \to B$ eine Funktion. Existiert eine Funktion $g : B \to A$ so, dass $f \circ g : B \to B$ gleich der identischen Funktion ist, also*
$$f(g(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in B,$$
so heißt $f^{-1} := g$ die ***Inverse*** *oder* ***Umkehrfunktion*** *von f in B, und f heißt* ***in** B **invertierbar***.

Die *Existenz* einer solchen Inverse ist i.A. schwer zu beweisen: Hinreichende und notwendige Bedingung ist dazu, dass die Funktion bijektiv ist.

Anmerkung 8.33. Sei $f : A \to \mathbb{R}$, wobei $A \subset R$. Ist f streng monoton, d.h. es gilt entweder
- $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in A$ so, dass $x < y$, oder
- $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in A$ so, dass $x < y$

so ist f, als Funktion von A nach $f(A)$ versehen, bijektiv und somit invertierbar. Im ersten Fall sagt man, dass die Funktion *monoton wachsend* ist, im zweiten Fall *monoton fallend*.

Anmerkung 8.34. Ist die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion stetig? Im Allgemeinem nicht. Ein Gegenbeispiel erhält man, indem die Funktion $f : (0,1) \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ betrachtet wird, wobei

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in (0,1), \\ x-1 & \text{falls } x \in [2,3). \end{cases}$$

Die Funktion ist in jeder der beiden Teilmengen ihres Definitionsbereiches stetig, da eine gegen 2 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deren Glieder im Definitionsbereich von f liegen notwendigerweise aus Elemente von $[2,3)$ besteht, sodass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - 1 = -1 + \lim_{n\to\infty} x_n = -1+2 = 1$. Also ist das Bild von f die Menge $(0,2)$ und die Umkehrfunktion ist durch

$$f^{-1}(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in (0,1), \\ x+1 & \text{falls } x \in [1,2), \end{cases}$$

sodass sie in 1 unstetig ist. Stetige invertierbare Funktione, deren Umkehrfunktion ebenfalls stetig ist, heißen *Homöomorphismen.*
Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass die Stetigkeit einer Umkehrfunktion ist durch eine stärkere Regularitätsannahme gesichert ist, vgl. Satz 9.11.(4).

Den folgenden Satz erwähnen wir ohne Beweis, s. [**4**, § 7.2].

Satz 8.35. *Seien $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $B \subset \mathbb{C}$ und sei $f : A \to B$ eine bijektive stetige Funktion. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ von f stetig.*

Anmerkung 8.36. Die Definition der Stetigkeit durch ε und δ gilt für viele als der Inbegriff der mathematischen Pingelichkeit. Doch gibt es gute Gründe für die obige Definition: obwohl fast alle übliche Funktionen, welche durch ein analytisches Gesetz hingeschrieben werden können, stetig sind, ist von Jean-Baptiste Joseph Fourier beobachtet worden, dass es Beispiele von Funktionen gibt, die über eine Reihe definiert werden und doch unstetig sind. Die Definition 8.11 geht auf Bernard Bolzano zurück, der sie 1817 eingeführt hat. Eine äquivalente Formulierung wurde aber im Satz 8.17 vorgestellt, s. auch [**1**, § VI.4].

Auch die empirische Definition, *der Graph einer stetigen Funktion soll keinen Sprung entahlten*, ist manchmal irreführend: tatsächlich ist jede Funktion stetig, deren Graph sprungfrei ist – doch gibt es nicht immer eine treue graphische Darstellung der Funktion, vgl. Beispiel 8.18. Zwei weitere Beispiele liefern z.B. die Funktionen

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$g : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

welche in der Nähe von $x = 0$ so schnell oszillieren, dass das genaue Plotten unmöglich wird. In der Tat ist die Funktion f in 0 unstetig, die Funktion g jedoch in 0 stetig.

Die folgende Aussage formalisiert schließlich die Vorstellung, bei dem Graph einer stetigen Funktion lägen keine Sprunge vor, d.h. ihr Wertebereich sei lückenfrei. Sie wurde 1817 von Bernhard Bolzano bewiesen.

Satz 8.37 (Zwischenwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $f(a) \leq f(b)$ (sonst läuft der Beweis im Wesentlichem gleich) und betrachte $\gamma \in [f(a), f(b)]$: Man will zeigen, dass ein $x \in [a,b]$ existiert, mit $f(x) = \gamma$. Definiere rekursiv zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$ und $\gamma \in [f(a_n), f(b_n)]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze z.B. $a_0 = a$ und $b_0 = b$. Nun betrachten wir die Stelle $c_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$. Ist $f(c_0) \leq \gamma$, so setze $a_1 = c_0$ und $b_1 = b_0$, andernfalls $a_1 = a_0$ und $b_1 = c_0$. Dann betrachtet man die Stelle $c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ und verfährt genauso um a_2, b_2 zu konstruieren, usw. Dadurch werden wohl zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert. Dabei gilt stets, dass $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $\gamma \in [f(a_n), f(b_n)]$.

Da die Länge $b_n - a_n$ des Intervalls $[a_n, b_n]$ gegen 0 konvergiert, muss laut Satz 5.19 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: x$ gelten, und somit wegen der Stetigkeit von f und des Satzes 8.17 auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) =: f(x)$. Da stets Intervall $f(a_n) \leq \gamma \leq f(b_n)$ gilt, folgt wegen des Sandwichsatzes $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \gamma = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$. Somit ist $f(x) = \gamma$. □

Anmerkung 8.38. Die im Beweis vom Satz 8.37 angewandte Methode heißt Bisektionsverfahren. Sie erlaubt die algorithmische Bestimmung von Nullstellen von beliebingen stetigen Funktionen, vgl. auch [**6**, § 6.3]. Hat eine Funktion zusätzliche Eigenschaften, so kann man effizientere numerische Schemata benutzen, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden.

Als Anwendung des Zwischenwertsatzes erhalten wir die folgenden Resultate.

Satz 8.39 (Existenz einer positiven n. Wurzel). *Sind $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}^*$, so hat die Gleichung $x^n = \alpha$ eine positive Lösung, welche (positive) n. Wurzel von α heißt und mit $\sqrt[n]{\alpha}$ bezeichnet wird.*

Beweis. Definiere eine Funktion $f(x) := x^n - \alpha$. Dann ist $f(0) < 0$ und $f(1+\alpha) = (1+\alpha)^n - \alpha > 1 + n\alpha - \alpha = 1 + (n-1)\alpha \geq 0$ aufgrund der Bernoullischer Ungleichung aus der Übungsaufgabe 4.6. Die Funktion f ist wegen der Rechenregeln offensichtlich in $[0, 1+\alpha]$ stetig und somit gibt es laut Satz 8.37 ein $x \in [0, 1+\alpha]$, sodass $f(x) = 0$. □

Somit ist die Potenzfunktion $x \mapsto x^n$ bijektiv von $(0, \infty)$ nach $(0, \infty)$. Sie ist stetig nach Beispiel 8.26 und somit ist laut Satz 8.35 auch ihre Umkehrfunktion stetig.

Satz 8.40. *Die Einschränkung der Exponentialfunktion ist bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $(0, \infty)$.*

Beweis. Da die Funktion exp streng monoton ist, ist sie notwendigerweise injektiv. Um zu zeigen, dass sie auch surjektiv ist, sei $y > 0$ und betrachte die Fälle $y \geq 1$ und $y < 1$. Ist $y \geq 1$, so gilt $\exp(0) = 1$ und $\exp(y) = 1 + y + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^k}{k!} > 1 + y$, also liefert der Zwischenwertsatz die Existenz eines $x \in \mathbb{R}$, sodass $\exp(x) = y$. Ist nun $0 < y < 1$, so folgt aus der Monotonie der Exponentialfunktion und der Tatsache, dass $\exp(0) = 1$, dass ein solches $\tilde{x}$ notwendigerweise $\tilde{x} < 0$ erfüllen soll. Es ist $y^{-1} > 1$ und somit gibt es $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, sodass $\exp(\tilde{x}) = y^{-1}$. Nach (6.5) ist dann $y = \exp(\tilde{x})^{-1} = \exp(\tilde{x}^{-1})$. □

Anmerkung 8.41. Aus der Bijektivität der reellen Exponentialfunktion folgt unmittelbar die Existenz einer Umkehrfunktion $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, also einer Funktion log so, dass

$$x = \log(y) \qquad \text{falls} \qquad y = \exp(x).$$

Diese Funktion wird *natürlicher Logarithmus*, oder einfach *Logarithmus*, genannt. Die folgenden Eigenschaften sind unmittelbare Konsequenzen der Definition des Logarithmus bzw. der Exponentialfunktion:

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ für alle $x, y > 0$;
- $\log(x^p) = p \log(x)$ für alle $x > 0$ und $p \in \mathbb{Q}$;
- log ist auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend;
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0$.

Insbesondere besagt dieser Grenzwert, dass die Logarithmusfunktion *langsamer* als jede Potenz wächst. Darüber hinaus folgt aus dem Satz 8.35, dass die Logarithmusfunktion auf $(0, \infty)$ stetig ist.
Es ist möglich, eine komplexe Erweiterung der Logarithmusfunktion zu definieren. Dies geht weit über diese Vorlesung hinaus, kann aber z.B. in [**4**, § 8.10] nachgeschlagen werden.

Übungsaufgabe 8.42. Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig. Zeige: es gibt $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$. Man sagt, dass x_0 ein *Fixpunkt* von f ist. *(Hinweis: Betrachte die Funktion $g : [0,1] \ni x \mapsto f(x) - x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass g eine Nullstelle hat.)*

Übungsaufgabe 8.43. Nimm an, die Temperatur auf der Erde wird in jedem Zeitpunkt von einer stetigen Funktion beschrieben. Bezeichne also mit $f(\vartheta)$ die Temperatur im Punkt auf dem Äquator mit geographischer Länge $\vartheta \in [-180, 180]$. Aufgrund der Stetigkeit ist $f(-180) = f(180)$. Zeige, dass es mindestens zwei Punkten auf dem Äquator gibt, die gleiche Temperatur haben.

Anmerkung 8.44. Sei $a > 0$. Man definiert die *Exponentialfunktion zur Basis a* durch $\exp_a(z) := \exp(z \log(a))$, $z \in \mathbb{C}$, und schreibt manchmal auch a^z für $\exp_a(z)$. Folgende Eigenschaften gelten:

- Die Exponentialfunktionen sind stetig: Weil $\log(a)$ konstant ist, ist $g : z \mapsto z \log(a)$ stetig, und somit auch $\exp_a = \exp \circ g$, denn exp ist stetig.
- Die Exponentialfunktionen sind auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend) falls $a > 1$ (bzw. $a < 1$). Denn wenn $a > 1$ (bzw. $a < 1$) ist $\log(a) > 0$ (bzw. $\log(a) < 0$), also ist $\exp_a(z) = \exp(z\alpha)$ mit $\alpha > 0$ (bzw. $\alpha < 0$), also folgt die Monotonie aus der Monotonie der Exponentialfunktion exp.
- Es gilt $\exp_a(z + w) = \exp_a(z) \exp_a(w)$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ sowie $\exp_{\exp_a(x)}(y) = \exp_a(xy)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, weil
$$\begin{aligned}\exp_a(z + w) &= \exp((z + w) \log(a)) = \exp(z \log(a) + w \log(a)) \\ &= \exp(z \log(a)) \exp(w \log(a)) = \exp_a(z) \exp_a(w)\end{aligned}$$
sowie
$$\exp_{\exp_a(x)}(y) = \exp(y \log \exp_a(x)) = \exp(y \log \exp(x \log(a))) = \exp((yx) \log(a)) = \exp_a(xy).$$
- Sei $z = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt $\exp_a(\frac{n}{m}) = \sqrt[m]{a^n}$, weil $\exp_a(\frac{n}{m}) = \exp(\frac{1}{m} n \log(a)) = \exp(n \log(a))^{\frac{1}{m}} = \exp_a(n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\exp_a(n)} = \sqrt[m]{a^n}$ gilt.
- Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Man schreibt $a^z := \exp_a(z)$. Diese schreibweise ist konsistent, denn $\exp_e = \exp$.

Übungsaufgabe 8.45. Sei $f(x) := \frac{x^x}{e^x}$. Bestimme den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to 0$.

Übungsaufgabe 8.46. a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(1) = e$, die stetig in 0 ist, und $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige

(i) $f(0) = 1$.
(ii) $f(nx) = f(x)^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $f(r) = e^r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$.
(iv) f ist stetig auf $\mathbb{R}$.
(v) $f(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $f(x + y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige: Es gibt $c > 0$, sodass $f(x) = c \exp(x)$.

Da laut Satz 8.19 exp eine stetige Funktion auf $\mathbb{C}$ ist, folgt unmittelbar dank der Rechenregeln, dass auch die trigonometrischen Funktionen cos und sin sowie ihr Quotient tan stetig sind.

Beispiel 8.47. Man sieht wie für die Exponentialfunktion, dass auch die Einschränkungen von sin und cos auf $\mathbb{R}$ reellwertig sind. Man kann sogar zeigen, dass die Einschränkungen $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ sowie $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und somit injektiv sind. Dank dem Zwischenwertsatz folgt schließlich, dass $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ sowie $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ auch surjektiv sind. Somit sind sie bijektiv und invertierbar: ihre Umkehrfunktion nennt man *Arcussinus* (arcsin) bzw. *Arcuscosinus* (arccos). Auch die Funktion *Tangens*, welche durch
$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
definiert wird, ist bijektiv und somit invertierbar: ihre Umkehrfunktion heißt *Arcustangens* und wird durch arctan bezeichnet. □

Betrachte einen Kreis mit Radius 1, also die Menge $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Wir haben schon angemerkt, dass die mittels Exponentialfunktionen definierten $\sin(\varphi)$ bzw. $\cos(\varphi)$ den Koordinaten des Punktes (x,y) entsprechen, sodass die Länge des Bogens zwischen $(1,0)$ und (x,y) genau φ ist. Man kann eine ähnliche Konstruktion auch für eine Parabel wiederholen, also für die Menge $P := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$. Dies führt zur Einführung der sog. *Hyperbelfunktionen* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sowie $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}, \qquad z \in \mathbb{R},$$

definiert werden.

Übungsaufgabe 8.48. a) Zeige, dass die Funktionen cosh und sinh stetig auf $\mathbb{C}$ sind. Bestimme einen Definitionsbereich, auf dem tanh stetig wird.
b) Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y),\\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),\\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1.\end{aligned}$$

c) Zeige: Die Einschränkungen von $\cosh, \sinh, \tanh$ auf $\mathbb{R}$ sind reellwertige Funktionen; sinh und tanh sind auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, wobei cosh ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

Übungsaufgabe 8.49. *[...] So tabellierte um 1325 Nahm al-Dīm al-Misri in Kairo eine Funktion mit drei Variablen, $f(x,y,z)$ [...] Die Tabelle berechnete die Zeit seit dem Aufgang der Sonne oder irgendeines Sternes. x zeigt die Mittagshöhe der Sonne oder die maximale Gestirnshöhe an, y die augenblickliche Höhe und z die halbe Länge des Tageslichts oder den Halbkreis, in dem ein Stern sichtbar ist. Die zugrunde liegende Funktion lautet:*

$$f(x,y,z) = z - \operatorname{arcvers}\left(\operatorname{vers} z \left(\frac{1-\sin(y)}{\sin(x)}\right)\right).$$

Die Funktion vers *wird dabei durch* $\operatorname{vers}\vartheta = 1 - \cos\vartheta$ *definiert*[1].
(Aus: David King, *Astronomie und Mathematik als Gottesdienst: Das Beispiel Islam*, in Jochen Brüning and Eberhard Knobloch (Ed.)., "Die mathematischen Wurzeln der Kultur – Mathematische Innovationen und ihre kulturellen Folgen", München: Wilhelm Fink Verlag, 2005, pp. 91–123.)

(1) Warum kann man aus einfachsten astronomischen Überlegungen erwarten, dass diese Funktion f stetig ist? Mit welchem Definitionsbereich $A \subset \mathbb{R}^3$?
(2) Zeige mittels Rechenregeln, dass $f : A \to \mathbb{R}$ stetig ist. *(Hinweis: Verwende Anmerkung 8.27.)*

Im Rest dieses Kapitels schränken wir uns auf den Fall von reellwertigen Funktionen ein, d.h. auf Funktionen, deren Zielmenge $\mathbb{R}$ (und nicht $\mathbb{C}$) ist. Somit können wir die Anordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$ nutzen. Insbesondere können wir folgende einführen.

Definition 8.50. *Sei $A \subset \mathbb{R}^N$ und betrachte eine Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$. Dann heißt x **lokale Maximumstelle** (bzw. **Minimumstelle**) und $f(x)$ **lokales Maximum** (bzw. **Minimum**) von f, falls eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x)$ von x existiert, sodass $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) \leq f(y)$) für alle $y \in U_\varepsilon(x) \cap A$. Darüber hinaus heißt x **globale Maximumstelle** (bzw. **Minimumstelle**) und $f(x)$ **globales Maximum** (bzw. **Minimum**) von f, falls $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) \leq f(y)$) für alle $y \in A$.*

Anders gesagt heißt y Maximum bzw. Minimum einer Funktion $f : A \to \mathbb{C}$, wenn y Maximum bzw. Minimum ihres Wertebereich ist.

Es ist wichtig zu merken, dass nicht jede Funktion ein Maximum bzw. ein Minimum hat: eine notwendige Bedingung ist wohl, dass ihr Wertebereich nach oben bzw. nach unten beschränkt ist. Selbst wenn er beschränkt

[1] arcvers ist wohl die Umkehrfunktion von vers.

ist muss ihr Wertebereich kein Maximum bzw. Minimum haben: z.B. ist die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, welche durch $x \mapsto x^2$ definiert wird, beschränkt, denn ihr Wertebreich ist $[0, 1)$. Dies zeigt, dass sie zwar ein globales Minimum hat (in der Minimumstelle 0), aber kein Maximum (weder lokal noch global): ihr Wertebereich hat in der Tat nur das Supremum, dieser Wert wird aber nirgendwo im Definitionsbereich der Funktion angenommen.

Ein allgemeines Existenzkriterium für Maxima und Minima ist deshalb sehr interessant.

Satz 8.51 (Satz vom Maximum und Minimum). *Seien $A \subset \mathbb{R}^N$ eine kompakte Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann hat f ein globales Maximum und ein globales Minimum.*

Beweis. Wir zeigen erst, dass $f(A)$ kompakt ist, und dank Satz 7.24 reicht es folgendes zu beweisen: Jede Folge, deren Glieder in $f(A)$ liegen, hat eine in $f(A)$ konvergente Teilfolge (d.h., ihr Grenzwert existiert und ist Element von $f(A)$). Betrachte dazu eine Folge in $f(A)$, etwa $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Dann liegen alle Glieder der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der kompakten Menge A, also existiert eine in A konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, etwa $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x \in A$. Wegen der Stetigkeit von f und des Satzes 8.17 ist auch die Folge $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent: genauer gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in f(A)$, was zu zeigen war.

Es reicht nun zu beweisen, dass die kompakte Menge $f(A)$ ein Maximum und ein Minimum hat. Als kompakte Menge ist in der Tat $f(A)$ beschränkt, und somit hat sie Infimum und Supremum; da $f(A)$ aber auch abgeschlossen ist, sind in der Tat Infimum bzw. Supremum auch Minimum bzw. Maximum laut Übungsaufgabe 7.20. $\square$

Anmerkung 8.52. In vielen Ländern (seltsamerweise nicht in Deutschland) ist dieser unter dem Namen "Satz von Weierstraß", nach Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, bekannt.

Es ist auch historisch interessant zu merken, Jean Robert Argand hat 1814 einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (in der Version: "Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle") geliefert, der auf dem Satz vom Maximum und Minimum beruht, s. [**4**, § 7.6].

Übungsaufgabe 8.53. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ heißt *Lipschitzstetig*, falls ein $L > 0$ existiert so, dass

$$|f(x) - f(y)| \le L\|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in A.$$

Zeige: jede Lipschitzstetige Funktion ist auch stetig.

KAPITEL 9

Differentialrechnung von Funktionen einer Variabel

Sei f eine reellwertige Funktion einer reellen Variablen. Während die Stetigkeit von f anschaulich bedeutet, dass der Graph von f keinen Sprung enthählt, heißt f *differenzierbar*, wenn ihr Graph keine Knicke zeigt. Wie auch für die Stetigkeit ist diese intuitive Definition leider zu ungenau.

Definition 9.1. *Sei $A \subset R$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt* ***in*** *$x_0 \in A$* ***differenzierbar****, falls der Grenzwert des sogenannten Differenzenquotient*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{9.1}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ (Aussprache: "d-f nach d-x") bezeichnet: $f'(x_0)$ wird auch ***Ableitung von f an der Stelle*** *x_0 genannt. Ist f für alle $x_0 \in A$ differenzierbar, so heißt sie einfach* ***differenzierbar*** *und f' ist ihre* ***Ableitung****.*

Diverse physikalische und geometrische Probleme weisen darauf hin, die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen zu bestimmen. Pierre de Fermat konnte schon 1640 eine solche Aufgabe für Polynome lösen, doch eine ansatzweise vollständige Theorie der Differentialrechnung wurde 1684 von Gottfried Wilhelm Leibniz und 1687 von Sir Isaac Newton eingeführt. Ihre mathematische Konstruktionen und Techniken waren unterschiedlich und (wie heute bekannt ist) ihre Resultate wurden unabhängig voneinander entwickelt, obgleich eine Kommission der Royal Society of London dies bestritt und 1712 in einer Plagiatsklage Newton die Priorität zuteilte.

Anmerkung 9.2. Seien $x_0 \in A$ und $h > 0$ so, dass auch $x_0 + h \in A$. Die Gerade durch $(x_0, f(x_0)), (x_0 + h, f(x_0+h)) \in \mathbb{R}^2$ enthält alle Punkte

$$\left(x, f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Falls f in x_0 differenzierbar ist, konvergiert also die Steigung dieser Gerade gegen $f'(x_0)$ für $h \to 0$, und im Grenzwert erhält man die Tangente in $(x_0, f(x_0))$ an den Graphen von f: diese ist die Gerade, welche alle Punkte mit Koordinaten

$$(x, f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

enthält.

Beispiel 9.3. Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha \in \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt differenzierbar und es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha-\alpha}{h} = 0$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, also ist $f'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. □

Beispiel 9.4. Die identische Funktion $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt differenzierbar und es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, also ist $f'(x_0) = 1$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. □

Beispiel 9.5. Wir zeigen erst, dass exp in 0 differenzierbar ist. Es gilt nämlich für alle $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} - 1}{h} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}}{h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{h^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{(k+1)!},$$

sodass

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} - 1}{h} = 1 + \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{(k+1)!} = 1.$$

Für h klein gilt $\exp(h) \leq 1 + h + h^2$, und somit laut Majorantenkriterium (vgl. [**3**, S. 290])

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} - 1}{h} = 1 + \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!} = 1,$$

und schließlich

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$$

Die Exponentialfunktion ist sogar in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar: wegen (6.5) gilt nämlich

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \exp(x_0)\frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} = \exp(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x_0),$$

also ist $\exp'(x_0) = \exp(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. □

Anmerkung 9.6. Während die Theorie der Stetigkeit sich dafür eignet, auch für Funktionen mehreren Variablen erklärt zu werden, ist der Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion mehreren Variablen viel technischer und wird im Kapitel 11 eingeführt. Noch viel komplizierter ist die Theorie der Differenzierbarkeit für Funktionen einer komplexen Variablen: sie ist das Hauptthema der sog. Funktionentheorie, welche jenseits der Ziele dieser Vorlesung ist.

Eine wesentliche Charakterisierung der Differenzierbarkeit ist in folgendem

Satz 9.7. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in A$, $a \in \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(a) f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = a$;
(b) es gibt eine in x_0 stetige Funktion $\varphi : A \to \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \varphi(x)h \qquad \text{für alle } h \text{ mit } x_0 + h \in A, \tag{9.2}$$

oder äquivalent so, dass

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x + h)(x - x_0) \qquad \text{für alle } x \in A, \tag{9.3}$$

Gelten (a) und (b), so ist $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

Beweis. Die Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn der Differenzenquotient in x_0 (vgl. (9.1)) einen Grenzwert für $h \to 0$ hat, und somit ist die Funktion φ, welche durch

$$\varphi(x_0 + h) := \begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} & x \in A \setminus \{x_0\}, \\ f'(x_0) & \text{sonst}, \end{cases}$$

definiert wird, in x_0 stetig. □

Zwei unmittelbare, doch wesentliche Folgerungen vom Satz 9.7 werden in den folgenden Sätze zusammgengefasst.

Satz 9.8. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in A$. Ist $f : A \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so ist sie auch in x_0 stetig.*

Beweis. Die Darstellung (9.3) gilt. Nun sind beide Funktionen $x \mapsto \varphi(x)$ als auch $x \mapsto x - x_0$ in x_0 stetig, und somit auch ihr Produkt $x \mapsto \varphi(x)(x - x_0)$. Schließlich ist auch das Produkt $x \mapsto f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$ in x_0 stetig, da $f(x_0)$ eine Konstante ist. □

Anmerkung 9.9. Die Umkehrrichtung gilt nicht. Ein Beispiel einer stetigen, nicht differenzierbaren Funktion ist durch $x \mapsto |x|$ gegeben.

Übungsaufgabe 9.10. Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f an der Stelle 0 stetig aber nicht differenzierbar ist.

Satz 9.11 (Rechenregel für differenzierbare Funktionen). *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : A \to \mathbb{R}$, welche in $x_0 \in A$ differenzierbar sind. Dann gelten die folgenden Rechenregel.*

(1) Die Funktion $(f + g)$ ist in x_0 differenzierbar und $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
(2) Die Funktion $(f \cdot g)$ ist in x_0 differenzierbar und $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
(3) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.
(4) Sei zusätzlich $B \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $j : B \to \mathbb{R}$ so, dass $f(x) \in B$ für alle $x \in A$. Ist j in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar, so ist die Funktion $j \circ f$ in x_0 differenzierbar und $(j \circ f)'(x_0) = j'(f(x_0))f'(x_0)$.

Die Produktregel (2) wurde von Leibniz selber gefunden. Die Regel (4) heißt *Kettenregel*.
Wir beweisen nur zwei dieser Regeln: die anderen gelten als Übungsaufgabe. Was passiert in 2) im Spezialfall einer Funktion g, die konstant ist?

Beweis. 1) Sei $x_0 \in A$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0). \end{aligned}$$

4) Laut Satz 9.7 gibt es zwei in x_0 stetige Funktionen $\varphi : A \to \mathbb{R}$ und $\psi : B \to \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0) \qquad \text{für alle } x \in A$$

und

$$j(y) - j(y_0) = \psi(y)(y - y_0) \qquad \text{für alle } y \in B$$

wobei $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ und $\psi(y_0) = j'(y_0) = j'(f(x_0))$. Also gilt

$$(j \circ f)(x) - (j \circ f)(x_0) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) = \psi(f(x))\varphi(x)(x - x_0) = (\psi \circ f)(x)\varphi(x)(x - x_0)$$

für alle $x \in A$. Nun sieht man, dass die Funktion $(\psi \circ f) \cdot \varphi$ als Verkettung und Produkt von in x_0 stetigen Funktionen selber stetig ist. In x_0 nimmt $(\psi \circ f) \cdot \varphi$ den Wert $(\psi \circ f)(x_0)\varphi(x_0) = j'(f(x_0))f'(x_0)$ an. Man kann wieder dank Satz 9.7 schließen, dass die Funktion $j \circ f$ in x_0 differenzierbar ist. □

Übungsaufgabe 9.12. Sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein offenes Intervall ist, und $a \in I$. Zeige: Ist f an der Stelle $a \in I$ differenzierbar, so existiert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}. \tag{9.4}$$

Folgt aus der Existenz des Grenzwertes in (9.4), dass f an der Stelle a differenzierbar ist?

Beispiel 9.13. Es folgt unmittelbar aus der Definition der trigonometrischen Funktionen, dass

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\exp(ix) + \frac{d}{dx}\exp(-ix)\right) = \frac{1}{2}\left(i\exp(ix) - i\exp(-ix)\right) = -\sin(x)$$

und ähnlich

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{d}{dx}\exp(ix) - \frac{d}{dx}\exp(-ix)\right) = \frac{1}{2i}\left(i\exp(ix) + i\exp(-ix)\right) = \cos(x).$$

□

Übungsaufgabe 9.14. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$. Zeige mittels der Definition sowie auch mittels der Rechenregeln, dass f differenzierbar ist und für alle x_0 gilt $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

Übungsaufgabe 9.15. Sei $x \in \mathbb{R}$.

(1) Zeige, dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \log(1)}{\frac{x}{n}} = 1.$$
(2) Folgere, dass
$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x.$$
(3) Zeige, dass
$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Übungsaufgabe 9.16. Sei $-\infty \le a < b \le \infty$ und sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass $f'(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Zeige: Es gibt $c \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = c\exp(\lambda x)$ für alle $x \in (a,b)$. *(Hinweis: Differenziere $h(x) := \exp(-\lambda x)f(x)$.)*
(2) Sei $f(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ und definiere $g(x) = \log f(x)$. Zeige, dass g differenzierbar ist und berechne g'.
(3) Gib mit Hilfe von (2) einen zweiten Beweis von (1) unter der Voraussetzung, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$.

Satz 9.17. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige injektive Funktion, sodass sie laut Satz 8.35 eine (stetige) Umkehrfunktion $g : B \to A$ hat, wobei $B := f(A)$. Ist f in $x_0 \in A$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist g in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis. Laut Satz 9.7 gibt es eine stetige Funktion $\varphi : A \to \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x_0)(x - x_0) \qquad \text{für alle } x \in A,$$

wobei $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. Da f injektiv ist, gilt $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in A$ (sonst wäre $f(x) = f(x_0)$ für ein $x \in A$). Setze $y = f(x)$ sowie $x = g(y)$, sodass

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{\varphi(g(y))}(y - y_0).$$

Da die Funktion $\frac{1}{\varphi\circ g}$ in y_0 stetig ist, wieder nach Satz 9.7 ist die Funktion g in y_0 differenzierbar und ihre Ableitung ist $\frac{1}{\varphi(x_0)}$. □

Beispiel 9.18. Wir merken erst dass, da sin eine ungerade Funktion ist, gilt es

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(x) - i\sin(x)) = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1.$$

Betrachte nun $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, der Quotient zweier in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ differenzierbaren Funktionen. Laut Satz 9.17 ist nämlich

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

□

ÜBUNGSAUFGABE 9.19. a) Bestimme die Tangente von $f(x) = \tan(x)$ and der Stelle $(\frac{\pi}{4}, 1)$.
b) Bestimme die Tangente von $f(x) = x\cos(x)$ and der Stelle $(\pi, -\pi)$.

BEISPIEL 9.20. Die Logarithmusfunktion log ist Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, welche bijektiv und stetig ist. Somit ist $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x},$$

wobei wir benutzt haben, dass $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

BEISPIEL 9.21. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Betrachte die Abbildung $f : (0, \infty) \ni x \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\exp(\alpha\log(x))) = \exp(\alpha\log(x))\alpha\frac{1}{x} = x^\alpha\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{für alle } x > 0.$$

□

ÜBUNGSAUFGABE 9.22. Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.
(1) $f(x) = 5^x$;
(2) $f(x) = x^x$;
(3) $f(x) = x^{(x^x)}$;
(4) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;
(5) $f(x) = \log(\log(1 + x))$;
(6) $f(x) = x^{\sin(x)}$;
(7) $f(x) = \sqrt[3]{x^{\frac{3}{5}} + \sin^3(\frac{1}{x})}$;
(8) $f(x) = \frac{\cos(x)}{2+\sin\log(x)}$.

SATZ 9.23. *Sei $A \subset R$ ein offenes Intervall und $x_0 \in A$. Hat f in x_0 eine (lokale oder globale) Maximum- oder Minimumstelle und ist sie dort differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$.*

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap A$

$$f(x_0) - f(y) \leq 0$$

und im Grenzwert erhält man also für $x > x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

und ählich, falls $x < x_0$,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \leq 0,$$

und somit ist $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, d.h. $f'(x_0)$ verschwindet. □

Der folgende Satz wurde 1691 von Michel Rolle bewiesen.

SATZ 9.24 (Satz von Rolle). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche in jedem $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist. Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

BEWEIS. Ist f konstant, so gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a, b)$. Ist jedoch f nicht konstant, so folgt aus dem Satz 8.51, dass f ein Maximum und ein Minimum hat, mindestens eines von diesen liegt notwendigerweise in (a, b). Bezeichne durch ξ diesen Punkt: dann ist $f'(\xi) = 0$ laut Satz 9.23. □

Das folgende fundamentale Resultat stammt aus Joseph Louis Lagrange. Es ist eine direkte Folgerung des Satzes 9.24.

Satz 9.25 (Mittelwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in allen $x \in (a, b)$ auch differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$, so dass*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Übungsaufgabe 9.26. Führe den Beweis vom Satz 9.25 durch. Die Grundidee ist, den Graphen der Funktion derart zu "drehen", dass die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt werden.

Satz 9.27. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Falls $f : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist gelten folgende Aussagen:*

- *$f'(x) > 0$ für alle $x \in A$ genau dann, wenn f in A streng monoton wachsend.*
- *$f'(x) < 0$ für alle $x \in A$ genau dann, wenn f in A streng monoton fallend.*
- *$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in A$ genau dann, wenn f in A monoton wachsend.*
- *$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in A$ genau dann, wenn f in A monoton fallend.*

Anmerkung 9.28. Wir haben in der Anmerkung 9.3 gesehen, dass die Ableitung einer differenzierbarer Funktion in einem Punkt x_0 verschwindet, falls die Funktion in x_0 eine Maximum- oder Minimustelle hat. Sei umgekehrt f eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung in jedem Punkt vom Definitionsbereich verschwindet, so folgt aus dem Satz 9.25, dass $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ die Bedingung $f(b) - f(a) = 0$ erfüllt, und das für alle a und b im Definitionsbereich. Also ist f konstant.

Anmerkung 9.29. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = f$ und $f(0) = 1$. Dann ist $f = \exp$. Betrachte nämlich die Hilfsfunktion g, die durch $g(x) := f(x)\exp(-x)$ definiert wird. Dann ist g differenzierbar und ihre Ableitung lautet $(f'(x) - f(x))\exp(-x) = 0$, somit ist laut Anmerkung 9.28 g konstant. Da insbesondere $g(0) = f(0)\exp(0) = 1$, folgt $g(x) = 1$ für alle x.

Übungsaufgabe 9.30. Betrachte zwei Funktionen f, g, deren Ableitungen gleich sind. Betrachte nun die Differenz $f - g$ und zeige, dass f bis auf einer Konstante mit g überein stimmt.

Übungsaufgabe 9.31. Beweise den *erweiterten Mittelwertsatz*: Seien die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) auch differenzierbar. Gilt für $x \in (a, b)$ stets $g'(x) \neq 0$, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$, sodass

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dieser Satz ist manchmal unter dem Namen "Satz von Cauchy" bekannt.

Übungsaufgabe 9.32. Sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) auch differenzierbar mit stetiger Ableitung (man sagt, f ist *stetig differenzierbar*), sodass $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in [a.b]$. Zeige, dass f Lipschitzstetig ist. *(Hinweis: Wähle $L = \max_{t \in [a,b]} |f'(t)|$.)* Ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ Lipschitzstetig?

Satz 9.33 (Regel von L'Hôpital). *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Seien die Funktionen $f, g : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in A$. Sei für $a \in A$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

- *entweder* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$,
- *oder* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.

Dann gilt: falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert stimmt er mit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

überein.

Die Regel von L'Hôpital wurde von Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital in seinem 1696 veröffentlichem Lehrbuch der Differentialrechnung bewiesen. Die Aussage ist auch gültig, wenn im Satz die Zahl a formal durch das Zeichen $+\infty$ oder $-\infty$ ersetzt wird.

Beweis. Wir beweisen den Satz nur unter der Voraussetzung $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, die anderen Fälle sind ähnlich aber technisch komplizierter.

Aus dem erweiterten Mittelwertsatz (vgl. Übungsaufgabe 9.31) folgt, dass für alle $x \in A$ gilt

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

für ein passendes $x_0 \in (a, x)$ bzw. $\in (x, a)$. Also gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

da eben $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Strebt x nach a, so muss das auch x_0, also gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x_0\to a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Die beiden obigen Gleichungen liefern also die Aussage. □

Übungsaufgabe 9.34. Bestimme die Grenzwerte

(1) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi}$,
(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\exp(x)}{1/x}$,
(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-27x+8{,}5}{2x^2+0{,}8x}$,
(4) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$,
(5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-27x+7{,}1}{x^3-2x^2+5}$,
(6) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$,
(7) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{4\log(x)}$.

Beispiel 9.35. Die Regel von L'Hôpital kann leicht angewandt werden, um den Grenzwert der Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \in \mathbb{R}$ für $x \to 0$ zu bestimmen. In der Tat ist $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 = \lim_{x\to 0}$, also lässt sich Satz 9.33 anwenden und es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos 0 = 1,$$

da cos stetig in 0 ist. □

Beispiel 9.36. Wir zeigen mit Hilfe des Satzes von de l'Hôpital, dass $\lim_{y\to\infty} y^m e^{-y} = 0$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Es gilt nämlich $\lim_{y\to\infty} y^m = \infty$ und $\lim_{y\to\infty} e^y = \infty$, also kann man den Satz von de l'Hôpital anwenden, und es gilt

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^m}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{m \cdot y^{m-1}}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{m \cdot (m-1) \cdot y^{m-2}}{e^y} = \ldots = \lim_{y\to\infty} \frac{m!}{e^y} = \frac{m!}{\lim_{y\to\infty} e^y} = 0.$$

Ähnlich gilt $\lim_{y\to\infty} y^{-m} e^y = \infty$.

Diese Eigenschaften wird oft als "überpolynomielles Wachstum der Exponentialfunktion"bezeichnet. In der Komplexitätstheorie, einer Branche der theoretischen Informatik, spielen eine wichtige Rolle jene Aufgaben, welche von einer deterministischer Turing-Maschine innerhalb einer Zeit t gelöst werden können, wobei t polynomiell von der Eingabelänge n abhängt, also $t = O(n^k)$ für irgendein $k \in \mathbb{N}$. Die Probleme, deren Lösungsalgorithmus exponentielle Zeit benötigen, werden in der sog. Komplexitätsklasse E eingestuft. Das obige Ergebnis zeigt, dass die Klassen P und E verschieden sind (P ist strikt kleiner als E).

Die Komplexitätsklasse P taucht in dem sogenannten *P–NP-Problem*, dem möglicherweise wichtigsten offenen Problem der theoretischer Informatik, auf. Sein Löser würde einen mit \$ 1.000.000 dotierten Preis des Clay Mathematics Instituts, vgl. `http://www.claymath.org/millennium/P_vs_NP`. □

DEFINITION 9.37. *Sei $A \subset R$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt* ***in** $x_0 \in A$ **zweimal differenzierbar**, falls sie differenzierbar ist und der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $f''(x_0)$ oder $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ bezeichnet: $f''(x_0)$ wird auch ***2. Ableitung von** f **an der Stelle** x_0 genannt. Genauso kann man rekursiv eine n-**mal differenzierbare** Funktion definieren. Ist f sogar für alle $k \in \mathbb{N}$ in x_0 k-mal differenzierbar, so heißt f* ***in** x_0 **unendlich oft differenzierbar**.*

BEISPIEL 9.38. Wohlgemerkt, die Ableitung einer differenzierbarer Funktion braucht nicht selber eine stetige Funktion zu sein, und *a fortiori* auch nicht zweimal oder öfter differenzierbar. Die Funktion f, die durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert ist, ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da f' für x gegen 0 nicht konvergiert ist f' in 0 nicht stetig und kann somit laut Satz 9.8 auch nicht differenzierbar sein. □

ÜBUNGSAUFGABE 9.39. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige durch vollständige Induktion: Die Funktion $x \mapsto x^n$ ist unendlich oft differenzierbar und $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Gilt eine ähnliche Aussage für beliebige Polynome?

ÜBUNGSAUFGABE 9.40. Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen. Zeige durch vollständige Induktion: auch ihr Produkt $f \cdot g$ ist n-mal differenzierbar und es gilt

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}.$$

Mittels der 2. Ableitung läßt sich ein einfaches Kriterium zur Bestimmung von Maxima und Minima einer Funktion formulieren. Wir führen keinen Beweis durch.

SATZ 9.41. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in A$. Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$), so ist x_0 eine lokale Maximumstelle (bzw. Minimumstelle) von f.*

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in A$ differenzierbare Funktion, laut Satz 9.7 gilt $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$, wobei $\varphi : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, welche $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ erfüllt. Dies kann als ein Approximationsresultat von $f(x)$ angesehen werden:. Für die Funktion $F : A \to \mathbb{R}$, die durch $F(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ definiert wird, gilt nämlich $F(x_0) = f(x_0)$, $F'(x_0) = f'(x_0)$ und zusätzlich

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - F(x) = 0.$$

Allgemeiner kann man sich fragen ob eine ähnliche Darstellung auch gilt mit einer Funktion F, die $F(x_0) = f(x_0)$, $F'(x_0) = f'(x_0)$, ..., $F^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ erfüllt, falls f n-mal differenzierbar ist. Dies ist das Ziel der Theorie der Taylorentwicklung, welche 1712 von Brook Taylor erst untersucht wurde. Im Rest dieses Kapitels stellen wir keine Beweise vor und verweisen auf [**4**, Kap. 14].

Definition 9.42. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : A \to \mathbb{R}$ eine in x_0 n-mal differenzierbare Funktion. Dann heißt*

$$T_n f(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

***n-tes Taylorpolynom von f im Punkt** x_0.*

Ziel ist, eine Abschätzung für den Abstand (den sog. *Rest*) $f(x) - T_n f(x; x_0)$ zu erzielen.

Satz 9.43. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : A \to \mathbb{R}$ eine in x_0 $n+1$-mal differenzierbare Funktion. Dann gibt es $\xi \in (x_0, x)$ (bzw. $\xi \in (x_0, x)$) so, dass*

$$f(x) = T_n f(x; x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Der zweite Summand heißt Rest in Lagrange-Form.

Durch eine geschickte Wahl des Entwicklungspunktes x_0 erhält man einen Rest in Lagrange-Form, der mit n monoton fallend ist. Würde er eine Nullfolge bilden, so hätten wir scheinbar eine Reihendarstellung der Funktion gefunden.

Definition 9.44. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : A \to \mathbb{R}$ eine in x_0 unendlich oft differenzierbare Funktion. So heißt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

*die **Taylorreihe** oder **Taylorentwicklung von f im Punkt** x_0.*

Also kann man mittels Landau-Symbole (vgl. Definition 5.42) schreiben, dass

$$f(x) = T_n f(x; x_0) + o((x - x_0)^n) \qquad \text{für } x \to x_0.$$

Wenn sie existiert, muss die Taylorentwicklung einer Funktion f in einem Punkt x_0 muss aber *nicht* mit dem Wert $f(x_0)$ übereinstimmen.

Satz 9.45. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : A \to \mathbb{R}$ eine in x_0 unendlich oft differenzierbare Funktion. Die Taylorreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

konvergiert genau dann gegen $f(x_0)$, wenn die Folge der Resten in Lagrange-Form

$$\left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Nullfolge ist.

Übungsaufgabe 9.46. Bestimme die Taylorentwicklung von $x \mapsto \log(x)$ und $x \mapsto \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Um dieses Kapitel zu beenden führen wir das *Newtonverfahren*, ein numerisches Schema zur vergleichsweise effizienter Bestimmung von Nullstellen einer differenzierbarer Funktion f, ein. Dieses Verfahren wurde von Sir Isaac Newton bereits 1664 zur Untersuchung der konkreter Gleichung $y^3 - 2y = 5$ verwendet, und 1740 von Thomas Simpson zum allgemeinen Fall erweitert.

Die Idee von der Methode liegt darin, erst einen Startpunkt x_0 im Definitionsbereich von f willkürlich zu wählen, dann den Schnittpunkt der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ an dem Graph von f mit der x-Achse als x_1 zu bestimmen, weiter den Schnittpunkt der Tangente in $(x_1, f(x_1))$ an dem Graph von f mit der x-Achse als x_2 zu bestimmen, und so weiter rekursiv. Die dadurch definierte Newton-Iteration, d.h. die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, konvergiert unter milden Voraussetzungen gegen die gesuchte Nullstelle. Genauer gilt der folgende

Satz 9.47. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : A \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Gibt es $M > 0$ so, dass $f'(x) \neq 0$ unf $|f''(x)| < M$ für alle $x \in A$, so wird eine Nullstelle y durch die Newton-Iteration quadratisch approximiert, d.h.*

$$|x_n - y| \leq \frac{M}{f'(x_{n-1})}|x_{n-1} - y|^2,$$

wobei $x_0 \in A$ beliebig ist und

$$x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n.1})}.$$

Übungsaufgabe 9.48. Wende das Newtonverfahren an die Funktion $x \mapsto 1 - \frac{2}{x^2}$ an, um eine Approximation von $\sqrt{2}$ zu finden.

KAPITEL 10

Integralrechnung

Es ist ein altes mathematisches Problem, den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen. Etwas präziser kann man sich fragen: Gegeben sei der Graph einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kann man die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen bestimmen? Diese Frage, die im Wesentlichen auf Archimedes zurückgeht, beantwortet die moderne Theorie der Intergralrechnung. Verschiedene (und unterschiedlich komplizierte sowie allgemeine) Begriffe der Integration existieren, dennoch werden wir uns auf die sogenannte Riemannsche Integralrechnung einschränken, welche 1832 von Cauchy und später von Bernhard Georg Friedrich Riemann in seiner Habilitationschrift 1854 genau definiert und untersucht wurde. Doch konnten schon Newton und Leibniz den Weg für die moderne Theorie der Integration frei machen, indem sie die enge Beziehung mit dem Problem, die Tangente an den Graphen einer Funktion zu bestimmen, geahnt haben.

Kern der Riemannschen Integration ist die alte Idee, die Fläche unter dem Graphen einer Funktion immer besser durch immer feinere Zerlegungen in Vierecken anzunähern, deren Flächeninhalt elementar berechenbar ist. Diese Idee war den Altgriechen schon bekannt: darauf beruht die sog. **Exhaustionsmethode** von Eudoxos von Knidos, welche ihm vor 2300 Jahre erlaubte, das Volumen einer Pyramide und eines Kegels zu berechnen. Ein Schritt weiter geht man,wenn man versucht, die betrachtete Fläche "von Innen und von Aussen" durch Vierecke anzunähern. Dieser Zugang wurde wahrscheinlich 1870 von Jean Gaston Darboux formal untersucht, ist aber äquivalent zu dem eigentlichem Riemannschen Zugang – d.h., er liefert gleiche Ergebnisse, wenn die Funktion überhaupt integrierbar ist.

Im ganzen Kapitel seien a, b reelle Zahlen, mit $a < b$.

Definition 10.1. *Eine Abbildung $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, falls ihr Definitionsbereich $[a, b]$ sich derart in endlich vielen Teilintervalle*

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

*zerlegen lässt, mit $a = x_0$, $x_n = b$ und $x_k \le x_{k+1}$ für alle $k = 0, \dots, n+1$, dass ihre Einschränkungen $\varphi_{[x_k,x_{k+1})} =: c_k$ für alle $k = 0, \dots, n-1$ konstant sind. Die endliche Punktenmenge $\zeta := \{x_0, \dots, x_n\}$ heißt **Zerlegung** von $[a, b]$. Die Summe*

$$\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k)$$

*nennen wir **(bestimmtes) Integral von φ zwischen a und b**.*

Mann kann offensichtlich $[a, b]$ in unendlich vielen Weisen derart zerlegen, dass eine gegebene Treppenfunktion f auf jeden Teilintervall konstant ist. Doch kann man zeigen, dass $\int_a^b f(x)dx$ nicht von der gewählten Zerlegung abhängt.

Betrachte nun eine allgemeine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Ist f keine Treppenfunktion, so kann man für eine gegebene Zerlegung $\zeta := \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a, b]$ trotzdem zwei Treppenfunktionen φ_u, φ_o finden, sodass

$$\varphi_u(x) \le f(x) \le \varphi_o(x) \qquad \text{für alle } x \in [a, b]. \tag{10.1}$$

Im Folgenden sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Zerlegungen vom Intervall $[a, b]$. Das allgemeine Element von $\mathcal{P}$ werden wir ζ_n bezeichnen, wobei n die Anzahl der Punkten der Zerlegung bezeichnet.

Definition 10.2. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Definiere für jede Zerlegung $\zeta_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ zwei approximierende Funktionen durch*

$$\varphi_u(x) := \inf_{x \in [x_k, x_{k+1})} f(x) \qquad \textit{und} \qquad \varphi_o(x) := \sup_{x \in [x_k, x_{k+1})} f(x) \qquad \textit{falls } x \in [x_k, x_k + 1).$$

*Sind nun φ_u, φ_o Funktionen von $[a,b] \to \mathbb{R}$ (d.h., $\varphi_u(x), \varphi_o(x)$ sind reelle Zahlen für alle $x \in [a,b]$) und stimmen die sogenannten **unteres** bzw. **oberes Darbouxschen Integrale** überein, d.h., gilt*

$$\inf_{\zeta_n \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_o(x)(x_{k+1} - x_k) = \sup_{\zeta_n \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_u(x)(x_{k+1} - x_k),$$

*so heißt f **Riemann-integrierbar** oder einfach **integrierbar**. Der gemeinsame Wert wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet und heißt **bestimmtes Integral** von f zwischen a und b.*

Eine schöne anschauliche Darstellung des Riemannschen Begriff der Integrierbarkeit findet man in der .gif–Abbildung `http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Riemann.gif`.

Anmerkung 10.3. Beachte, dass die Benennung des Argumentes der Funktion keinerlei Rolle spielt: ist also $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so bezeichnen etwa die Symbole

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b f(y)dy, \qquad \int_a^b f(s)ds$$

die gleiche Zahl, welche durch Definition 10.2 eingeführt wurde.

Die Definition 10.2 spielt vorwiegend eine theoretische Rolle. Während sie erlaubt, die Integrierbarkeit einer Funktion zu widerlegen (vgl. Beispiel 10.5) ist es kaum möglich, dadurch zu überprüfen, dass eine gegebene Funktion integrierbar ist. Die einzige nennenswerte Ausnahme ist die folgende. Obwohl es sich um einen fast trivialen Fall handelt, werden wir dadurch eine Gleichung erlangen, die im Beweis des Satzes 10.14 benutzt wird, einem der wichtigsten Sätze der Theorie der Integralrechnung. Dieser Satz 10.14 wird wiederum den Weg frei für den sogenannten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung machen, welcher schließlich eine operative Definition der Intergrierbarkeit anbietet.

Beispiel 10.4. Sei $c \in \mathbb{R}$ und betrachte die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit konstantem Wert c. Dann ist f integrierbar und

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Denn von der gewählte Zerlegung von $[a,b]$ unabhängig sind offensichtlich auch die approximierenden Funktionen φ_u und φ_o konstant mit Wert c, und somit gilt

$$\begin{aligned} \inf_{\zeta_n \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_o(x)(x_{k+1} - x_k) &= c \inf_{\zeta_n \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = c(b-a) \\ &= c \sup_{\zeta_n \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \sup_{\zeta_n \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_u(x)(x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

□

Beispiel 10.5. Betrachte die Dirichletfunktion D aus Beispiel 8.18. Da die Funktion in "fast jedem Punkt im Definitionsbereich" Wert 0 annimmt könnte man ahnen, das Integral dieser Funktion sei 0. Leider ist diese Intuition falsch: Da die Funktion D in jedem Intervall $\inf = 0$ und $\sup = 1$ hat, betragen unteres bzw. oberes Darbouxsches Integral von $D : [0,1] \to \mathbb{R}$ 0 bzw. 1, also erfüllt D somit die Definition 10.2 nicht: *D ist nicht Riemann-integrierbar.* Übrigens beantwortet dieses Beispiel auch die durchaus berechtigte Frage, ob es nicht ausreichen würde, in der Definition 10.2 nur die von unten approximierenden Funktionen *oder* nur die von oben approximierenden Funktionen zu betrachten. Dies genügte in der Tat nicht, denn die beiden Zugänge können, wie gesehen, zu verschiedenen Ergebnisse führen.

Nebenbei bemerkt: Um dieses und andere Probleme zu beheben hat Henri Léon Lebesgue 1902 einen (strikt) schwächeren Begriff von Integrierbarkeit definiert – und somit eine (strikt) allgemeinere Integrationstheorie eingeführt. Nach seiner Theorie ist D tatsächlich (Lebesgue-) integrierbar und ihr Integral beträgt 0. Die Lebesguesche Theorie ist jedoch technisch deutlich komplizierter und wird deshalb nicht vorgeführt. □

Man definiert herkömmlich für jede integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx \qquad \text{sowie} \qquad \int_a^a f(x)dx = 0. \tag{10.2}$$

Anmerkung 10.6. Beachte dass das bestimmte Integral einer Funktion kann wohl eine negative Zahl sein. Interpretieren wir das Integral einer Funktion wie der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse, so gilt die Konvention, dass Fläche *unterhalb* der x-Achse einen negativen Beitrag leistet.

Definition 10.7. *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt* ***stückweise stetig****, falls eine Zerlegung $\zeta_n := \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a, b]$ existiert so, dass jede Einschränkung $f_{|(x_k,x_{k+1})}$ stetig ist.*

Der folgende Satz ist ein Grundstein der Theorie der Integralrechnung, doch ist leider sein Beweis technisch und aufwändig: er wird in [**4**, §11.2 und § 11.3] durchgeführt.

Satz 10.8. *Ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$*
- *monoton oder*
- *stückweise stetig,*

so ist sie integrierbar.

Satz 10.9 (Rechenregel für integrierbare Funktionen). *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Rechenregel.*

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ für alle $c \in [a, b]$.

(2) $f + g$ ist zwischen a und b integrierbar und $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

(3) αf ist zwischen a und b integrierbar und $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

Beweis. Wir beweisen nur die Eigenschaft (1). Sind beide f und g zwischen a und b integrierbar, so stimmen die oberen und unteren Darbouxschen Integrale von f bzw. g überein, d.h.

$$\inf_{\zeta_n \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_o(x)(x_{k+1} - x_k) = \sup_{\zeta_n \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_u(x)(x_{k+1} - x_k), \tag{10.3}$$

und

$$\inf_{\zeta_n \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_o(x)(x_{k+1} - x_k) = \sup_{\zeta_n \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_u(x)(x_{k+1} - x_k), \tag{10.4}$$

wobei

$$\varphi_u(x) = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1})} f(x) \qquad \text{und} \qquad \varphi_o(x) = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1})} f(x) \qquad \text{falls } x \in [x_k, x_k + 1)$$

und

$$\psi_u(x) = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1})} g(x) \qquad \text{und} \qquad \psi_o(x) = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1})} g(x) \qquad \text{falls } x \in [x_k, x_k + 1).$$

Sei also $\zeta = \zeta_n \in \mathcal{P}$ fest und merke, dass

$$\inf_{x \in [x_k, x_{k+1})} f(x) + \inf_{x \in [x_k, x_{k+1})} g(x) \le \inf_{x \in [x_k, x_{k+1})} (f + g)(x) =: \vartheta_u(x)$$

sowie

$$\sup_{x\in[x_k,x_{k+1})} f(x) + \sup_{x\in[x_k,x_{k+1})} g(x) \geq \sup_{x\in[x_k,x_{k+1})} (f+g)(x) =: \vartheta_o(x).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx &= \inf_{\zeta_n\in\mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_o(x)(x_{k+1}-x_k) + \inf_{\zeta_n\in\mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_o(x)(x_{k+1}-x_k) \\
&\geq \inf_{\zeta_n\in\mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \vartheta_o(x)(x_{k+1}-x_k) \\
&\geq \sup_{\zeta_n\in\mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \vartheta_u(x)(x_{k+1}-x_k) \\
&\geq \sup_{\zeta_n\in\mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_u(x)(x_{k+1}-x_k) + \sup_{\zeta_n\in\mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_u(x)(x_{k+1}-x_k) \\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.
\end{aligned}$$

Wegen (10.3)–(10.4) bekommt man also

$$\inf_{\zeta_n\in\mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \vartheta_o(x)(x_{k+1}-x_k) = \sup_{\zeta_n\in\mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \vartheta_u(x)(x_{k+1}-x_k),$$

d.h., $f+g$ ist selber Riemann-Integrierbar. □

Übungsaufgabe 10.10. Beweise die Rechenregel (2) und (3) aus dem Satz 10.9.

Satz 10.11. *Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar. Ist $f(x)\leq g(x)$ für alle $x\in(a,b)$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Betrachte eine Zerlegung $\zeta_n := \{x_0,\dots,x_n\}$ von $[a,b]$ und definiere approximierende Funktionen $\varphi_u,\varphi_o,\psi_u,\psi_o$ durch

$$\varphi_u(x) := \inf_{x\in[x_k,x_{k+1})} f(x) \qquad \text{und} \qquad \varphi_o(x) := \sup_{x\in[x_k,x_{k+1})} f(x) \qquad \text{falls } x\in[x_k,x_k+1),$$

$$\psi_u(x) := \inf_{x\in[x_k,x_{k+1})} g(x) \qquad \text{und} \qquad \psi_o(x) := \sup_{x\in[x_k,x_{k+1})} g(x) \qquad \text{falls } x\in[x_k,x_k+1).$$

Dann gilt punktweise $\varphi_u(x)\leq\psi_u(x)$ (sowie auch $\varphi_o(x)\leq\psi_o(x)$). Weil die beiden Funktionen integrierbar sind folgt aus Definition, dass

$$\sup_{\zeta_n\in\mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_u(x)(x_{k+1}-x_k) \leq \sup_{\zeta_n\in\mathcal{P}} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_u(x)(x_{k+1}-x_k),$$

also folgt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

was den Beweis vollendet. □

Übungsaufgabe 10.12. Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und betrachte die Funktion $|f| : [a, b] \ni x \mapsto |f(x)| \in \mathbb{R}$. Zeige: Ist $|f|$ integrierbar, so ist auch f integrierbar und es gilt

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

Übungsaufgabe 10.13. Sei $-\infty < a < b < \infty$.

(1) Sei $a \leq a' < b' \leq b$ und sei

$$f(t) = \begin{cases} c & \text{falls } t \in [a', b'], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige: f ist integrierbar und $\int_a^b f(t)dt = c(b' - a')$.

(2) Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ stetig. Ist $\int_a^b f(t)dt = 0$, so ist $f(t) = 0$ für alle $t \in [a, b]$. *(Hinweis: Ist $f(t_0) > 0$, so gibt es $\delta > 0$, sodass $f(t) \geq \frac{1}{2} f(t_0)$ für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.*

Satz 10.14 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gibt es $\xi \in (a, b)$ so, dass*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

Beweis. Da f stetig auf einem kompakten Intervall ist, hat sie laut Satz 8.51 ein globales Minimum und Maximum, etwa m und M, d.h. $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Interpretiere jetzt m und M als *Funktionen* mit konstantem Wert m bzw. M: dann kann man Satz 10.11 anwenden und schließen, dass

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx.$$

Laut Beispiel 10.4 gilt also

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a),$$

und somit ist die Zahl $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ zwischen Minimum und Maximum der Funktion enthalten. Aus dem Satz 8.37 gilt, dass $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ auch ein Wert der Funktion sein muß, etwa an der Stelle $\xi \in [a, b]$ angenommen. Daher folgt, dass

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a),$$

was zu zeigen war. □

Übungsaufgabe 10.15. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $\int_a^b f(x)dx = 0$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zeige, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Definition 10.16. *Seien $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann heißt $F : [a, b] \to \mathbb{R}$* ***Stammfunktion*** *von f, falls F auf (a, b) differenzierbar ist mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a, b)$.*

Beispiel 10.17. Angesischts der Differenziationsregeln vom Kapitel 9 ist

- $\frac{1}{a} \exp_a$ eine Stammfunktion von $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- $x \mapsto \frac{x^{k+1}}{k+1}$ eine Stammfunktion von $x \mapsto x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$;
- sin eine Stammfunktion von $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- $-\cos$ eine Stammfunktion von $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- log eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$;
- tan eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)^2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

□

Beispiel 10.18. Seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$x \mapsto a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

eine Stammfunktion von

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

□

Satz 10.19. *Seien $f, F_1, F_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$. Sind beide F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, so ist $F_1 - F_2$ eine Konstante.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes ist $(F_1 - F_2)'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$ und wende die Anmerkung 9.28 an. □

Satz 10.20 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion*

$$F : [a,b] \ni x \mapsto \int_a^x f(y)dy \tag{10.5}$$

eine Stammfunktion von f.

Beweis. (1) Sei $x \in (a,b)$ und $h > 0$ so, dass $x + h \in (a,b)$. Dann ist laut Satz 10.9.(1)

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(y)dy - \int_a^x f(y)dy}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(y)dy}{h}.$$

Nun wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung und erhalten wir die Existenz eines ξ zwischen x und $x + h$ so, dass $\int_x^{x+h} f(y)dy = f(\xi)h$. Also gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(\xi)h}{h} = f(\xi).$$

Strebt h nach 0, so strebt notwendigerweise auch ξ nach x, also folgt aus der Stetigkeit von f schließlich

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x),$$

was zu zeigen war. □

Es folgt unmittelbar aus den Sätze 10.20 und 10.19, dass jede weitere Stammfunktion von f bis auf eine Konstante mit der in (10.5) definierten Funktion F übereinstimmt.

Die folgende konkrete Regel zur Berechnung eines Integrals folgt unmittelbar.

Satz 10.21. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei Φ eine Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

und man bezeichnet oft

$$\Big[\Phi(x)\Big]_a^b := \Phi(b) - \Phi(a).$$

Man kann den Satz so umformulieren: Ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, auf (a,b) differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung, so gilt für alle $c, d \in (a,b)$ mit $c < d$, dass

$$\int_c^d g'(x)dx = g(d) - g(c).$$

Beweis. i) Betrachte erst die Stammfunktion F, die in (10.5) definiert ist. Für sie gilt die Aussage offensichtlich, denn laut (10.2) ist $\int_a^a f(x)dx = 0$.

ii) Sei nun Φ eine weitere Stammfunktion, so existiert laut Satz 10.20.(2) eine Konstante c so, dass $\Phi(x) = F(x) + c$ für alle $x \in [a, b]$. Somit ist dank i)

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - c - F(a) + c = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Dies vollendet den Beweis. □

Definition 10.22. *Die Menge der Stammfunktionen einer gegebener, integrierbarer Funktion f bezeichnet man mit*

$$\int f(x)dx \qquad \textit{(oder} \int f(y)dy, \int f(s)ds \int f(t)dt...\textit{)}$$

und nennt man ***unbestimmtes Integral von*** *f.*

Anmerkung 10.23. Die Integrierbarkeit einer Funktion f hängt nicht von ihrer Definition in abzählbar vielen Punkten ab. Genauer gesagt: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Gilt $f(x) \neq g(x)$ in höchstens abzählbar vielen Punkten, so haben f, g das selbe unbestimmte Integral. Zum Beweis s. [**4**, S. 201]. Insbesondere folgt, dass das bestimmte Integral zwischen a und b einer Funktion f bereits eindeutig bestimmt ist, falls f auf (a, b) stetig und beschränkt ist.

Für eine gegebene integrierbare Funktion f stimmen laut Satz 10.21 alle Elemente der Menge $\int f(x)dx$ bis auf eine Konstante überein; man schreibt also oft salopp

$$\int \exp(x)dx = \exp + c.$$

Satz 10.24 (Partielle Integration). *Sei A ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$ und $f, g : A \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, sodass f, g auf A auch differenzierbar mit stetiger Ableitung sind. Dann gilt für alle a, b so, dass $[a, b] \subset A$:*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[(fg)(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beweis. Laut Satz 9.11.(2) ist die Funktion $f \cdot g$ auf (a, b) differenzierbar und es gilt $(fg)' = f'g + fg'$, d.h.

$$f'(x)g(x) = (fg)'(x) - fg'(x) \tag{10.6}$$

für alle $x \in (a, b)$. Weil f', g' und $(fg)'$ nach Voraussetzung stetig sind kann man (10.6) zwischen a und b integrieren und

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \int_a^b (fg)'(x)dx - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Die Funktion fg ist aber eine Stammfunktion von $(fg)'$ und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = \Big[(fg)(x)\Big]_a^b.$$

Somit folgt die Aussage. □

Beispiel 10.25. Um das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$$

zu berechnen, interpretiere die Funktion unter dem Integralzeichen wie das Produkt zweier Funktionen f, g, wobei f die Sinus- und g die identische Funktion ist. Dann folgt aus Satz 10.24, dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx = \Big[(fg)(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = \frac{\pi}{2} + [\cos]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

□

Beispiel 10.26. Um die Logarithmusfunktion zu integrieren, stelle log als $f \cdot g'$ dar, wobei $f : x \mapsto \log(x)$ und $g : x \mapsto x$, sodass $g'(x) = 1$ für alle x sind. Somit gilt für alle a, b mit $0 < a < b$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \log(x)dx &= \int_a^b f(x)g'(x)dx \\
&= \Big[(fg)(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\
&= b\log(b) - a\log(a) - \int_a^b \frac{x}{x}dx \\
&= b\log(b) - a\log(a) - (b-a) \\
&= b(\log(b) - 1) - a(\log(a) - 1).
\end{aligned}$$

Also ist $x \mapsto x(\log(x) - x)$ eine Stammfunktion der Logarithmusfunktion. □

Übungsaufgabe 10.27. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, auf (a, b) differenzierbare Funktion, sodass f' auf (a, b) stetig ist. Folgere aus Satz 10.24, dass $\int_a^b f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2}(f(b) - f(a))$.

Die obige Regel der partiellen Integration ist eine Folgerung der Produktregel der Differentialrechnung. Genauso folgt sie sogenannte Substitutionsregel aus der Kettenregel.

Satz 10.28 (Substitutionsregel). *Sei A ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass f auf A auch differenzierbar mit stetiger Ableitung ist. Sei $[a, b] \subset A$. Seien zusätzlich $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ und $j : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $f(x) \in [c, d]$ für alle $x \in [a, b]$. Ist J eine Stammfunktion von j, so ist $J \circ f$ eine Stammfunktion von $(j \circ f) \cdot f'$. Anders gesagt,*

$$\int_a^b j(u)du = \int_a^b j(f(x))f'(x)dx = \Big[J(u)\Big]_{f(a)}^{f(b)}.$$

Beweis. Substituiere x durch u, d.h., setze $u(x) := f(x)$. Laut Satz 9.11.(4) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Funktion $J \circ f$ auf (a, b) differenzierbar und es gilt $(J \circ f)' = (J' \circ f)f' = (j \circ f)f'$. Durch Integration zwischen a und b folgt

$$\int_a^b j(f(x))f'(x)dx = \int_a^b (J \circ f)'(x)dx = \Big[J(f(x))\Big]_a^b = J(f(b)) - J(f(a)).$$

Dies liefert die Aussage. □

Beispiel 10.29. Um das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x^2)dx$$

zu berechnen, setze $f : x \mapsto x^2$ und $j := \sin$. Dann kann man die Substitutionsregel unmittelbar anwenden, also ist $(-\cos) \circ f$ eine Stammfunktion von $((-cos) \circ f) \circ f'$. Somit ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos(x^2)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right).$$

□

Interessanter ist der Fall, dass die zu integrierende Funktion (noch) nicht in Form einer Verkettung zweier Funktionen auftritt. Manchmal ist es jedoch günstig, eine solche Darstellung als Verkettung *künstlich* einzuführen.

Beispiel 10.30. Berechne
$$\int_1^2 \frac{1}{4x+1}dx.$$
Definiere $u(x) := 4x+1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass die Integrationsextrema $u = 5$ bzw. $u = 9$ (falls $x = 1$ bzw. $x = 2$) werden. Weil $u'(x) = 4$ für alle $x \in \mathbb{R}$ kann man das Integral auch als
$$\int_5^9 \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{4} du$$
darstellen. Dieses Integral gilt offensichtlich
$$\int_5^9 \frac{4}{u} du = \frac{1}{4}\Big[\log(u)\Big]_5^9 = \frac{\log 9 - \log 5}{4}.$$
□

Beispiel 10.31. Wir wollen die Theorie der Integration dazu verwenden, um zu überprüfen, dass der Flächeninhalt des Einheitskreises π ist. Das ist natürlich zur Aussage äquivalent, dass der Flächeninhalt der obere hälfte des Einheitskreises $\frac{\pi}{2}$ ist – anders gesagt: Der Flächeninhalt unterhalb dem Graphen der Funktion $f : x \mapsto 1 - x^2$ und oberhalb der x-Achse ist $\frac{\pi}{2}$ (hier benutzen wir, dass der Einheitskreis die Menge aller Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist, die $x^2 + y^2 = 1$ erfüllen). Berechne also
$$\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$
Führe die Substitution $x = \sin(y)$ durch, sodass $y = \arcsin(x)$ und $\sqrt{1-x^2} = \cos(y)$. Dann ist
$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(y)^2}\cos(y)dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(y)^2}\cos(y)dy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)^2 dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2y))dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2y)dy \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\Big[\sin(2y)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$
□

Übungsaufgabe 10.32. Bestimme
(1) $\int \exp(ax)dx$;
(2) $\int a^x dx$, wobei $a > 0$;
(3) $\int \cos(ax)dx$.

Übungsaufgabe 10.33. Zeige, dass
(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2})$;
(2) $\int \sinh(x) = \cosh(x)$;
Bestimme jeweils ein Intervall, auf dem die Formel gültig ist.

Als direkte Folgerung der Substitutionsregel ergibt sich der folgende Fall.

Satz 10.34. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, auf (a,b) differenzierbare Funktion. Sei $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist* $\log \circ f$ *eine Stammfunktion von* $\frac{f'}{f}$.

Beweis. Wende die Substitutionsregel mit $j : x \mapsto \frac{1}{x}$. □

Übungsaufgabe 10.35. Bestimme
(1) $\int_a^b \frac{\log(x)}{x} dx$;
(2) $\int_a^b x^\alpha \log(x) dx$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, wobei $0 < a < b$.

Beispiel 10.36. Betrachte die Funktion $\tan : (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}) \ni x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion überall strikt positiv. Um eine Stammfunktion zu bestimmen merke, dass $\cos' = -\sin$. Setze $f := \cos$. Somit ist laut Satz 10.34 $-\log \circ \cos$ eine Stammfunktion der tan, also ein Element von

$$\int \tan(x) dx = -\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

□

Nun möchten wir den Begriff von Integrierbarkeit auch für unbeschränkte Integrationsintervalle definieren.

Definition 10.37. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren Einschränkung auf jedes Intervall $[a,b]$ auch integrierbar ist, und so dass der Grenzwert*

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{s \to \infty} \int_a^s f(y)dy \quad (bzw. \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{s \to -\infty} \int_s^b f(y)dy)$$

existiert. So heißt f ***auf*** *$[a,\infty)$ (bzw.* ***auf*** *$(-\infty,b]$)* ***uneigentlich integrierbar****.*

Eine ähnliche Definition kann man auch für manche eigentlich nicht integrierbare Funktionen $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ bzw. $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ einführen, vgl. [**4**, § 11.9].

Beispiel 10.38. Sei $c > 0$. Dann ist $x \mapsto \exp(-cx)$ auf $[0,\infty)$ integrierbar. Denn eine Stammfunktion von $x \mapsto \exp(-cx)$ ist $x \mapsto \frac{\exp(-cx)}{c}$. Also gilt für $s > 0$

$$\int_0^s -\exp(-cx)dx = \left[\frac{\exp(-cx)}{c}\right]_0^s = \frac{1}{c}(1 - \exp(-cs)).$$

Somit ist

$$\int_0^\infty -\exp(-cx)dx = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{c}(1 - \exp(-cs)) = \frac{1}{c}.$$

□

Zum Schluss definieren wir den Begriff der Intergrierbarkeit von komplex-wertigen Funktionen, der gelegentlich in den Anwendungen nützlich sein kann.

Definition 10.39. *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls ihr Real- bzw. Imaginärteile* $\mathrm{Re}f : [a,b] \ni x \to \mathrm{Re}f(x) \in \mathbb{R}$ *und* $\mathrm{Im}f : [a,b] \ni x \to \mathrm{Im}f(x) \in \mathbb{R}$ *(Riemann-)integrierbar ist. In diesem Fall setzt man*

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b \mathrm{Re}f(x)dx + i\int_a^b \mathrm{Im}f(x)dx.$$

Beispiel 10.40. Wir wollen die Funktion $f : [0,2\pi] \ni x \mapsto \exp(x+ix) \in \mathbb{C}$ auf Integrierbarkeit untersuchen. Aufgrund der Eulerschen Identität (vgl. Beispiel 6.27) folgt, dass

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} \exp(x)\cos(x)dx + i\int_0^{2\pi} \exp(x)\sin(x)dx$$

existiert. Durch mehrfache partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \exp(x)\cos(x)dx &= \Big[\exp(x)\cos(x)\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \exp(x)\sin(x)dx \\
&= \Big[\exp(x)\cos(x)\Big]_0^{2\pi} + \Big[\exp(x)\sin(x)\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \exp(x)\cos(x)dx \\
&= \exp(2\pi)\cos(2\pi) - \exp(0)\cos(0) + \exp(2\pi)\sin(2\pi) - \exp(0)\sin(0) \\
&\qquad - \int_0^{2\pi} \exp(x)\cos(x)dx
\end{aligned}$$

und somit

$$\int_0^{2\pi} \exp(x)\cos(x)dx = \frac{\exp(2\pi)-1}{2}.$$

Ähnlich gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \exp(x)\sin(x)dx &= \Big[\exp(x)\sin(x)\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \exp(x)\cos(x)dx \\
&= \Big[\exp(x)\sin(x)\Big]_0^{2\pi} - \Big[\exp(x)\cos(x)\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \exp(x)\sin(x)dx
\end{aligned}$$

also

$$\int_0^{2\pi} \exp(x)\sin(x)dx = \frac{-\exp(2\pi)+1}{2}.$$

Insgesamt erhält man

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{\exp(2\pi)-1}{2} + i\frac{1-\exp(2\pi)}{2}.$$

$\square$

KAPITEL 11

Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen

Betrachte Funktionen $f : A \to \mathbb{R}^M$, wobei $A \subset \mathbb{R}^N$. In den Kapiteln 9 haben wir die Theorie der Differentialrechnung für reellwertige Funktionen einer reellen Variablen dargestellt, also für $N = M = 1$. Ziel dieses letzten Kapitels ist, die höherdimensionale Erweiterung dieser Theorien voranzutreiben, bzw. die Grundlagen davon einzuführen. Eine ausführliche Abhandlung der Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen findet man z.B. in [**5**].

Der Fall $M > 1$ ist leicht erledigt: denn eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}^M$ nimmt nach Definition Werte in $\mathbb{R}^M$ an, also ist die Bildmengen das kartesische Produkt von N Teilmengen $B_1, \ldots, B_M$ von $\mathbb{R}$, welche jeweils als Bildmenge einer reellwertigen Funktion $f_i : A \to B_i$ interpretiert werden können. Solche Funktionen $f_1, \ldots, f_M$ heißen *Komponenten* der Funktion f. Somit lassen sich alle bisherige Begriffe (Stetigkeit, Differenzierbarkeit und auch Integrierbarkeit) erweitern, indem man sie komponentenweise definiert: z.B. heißt $f : A \to B$

- stetig
- differenzierbar
- monoton
- integrierbar

falls alle ihre Komponenten $f_1, \ldots, f_M$ das sind.

Beispiel 11.1. Betrachte eine Kanonenkugel, die mit fester Anfangsgeschwindigkeit v und Abschusswinkel α geschossen wird. Berücksichtigt man den Luftwiderstand nicht, so liefern die klassischen Gesetze der Newtonschen Mechanik unmittelbar die Flugbahn der Kugel in Abhängigkeit von der Zeit ab dem Schuss. Dann liegt die Flugbahn in einer Ebene, die wir in kartesischen Koordinaten mit x bzw. y (horizontaler bzw. vertikaler Abstand vom Schusspunkt) beschreiben. Dann sind die dementsprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x(t) &= vt\cos(\alpha) \\ y(t) &= -\frac{gt^2}{2} + vt\sin(\alpha) \end{aligned}$$

solang $y(t) \geq 0$, wobei g die Fallbeschleunigung bezeichnet. Diese Gleichungen gelten auf jedem Planet, sobald man die spezifische Fallbeschleunigung g kennt ($g = 9,81 \ \frac{m}{s^2}$ auf der Erde).

Hat übrigens die Funktion y ein Maximum an einem Zeitpunkt t_0? Eine notwendige Bedingung ist laut Satz 9.23, dass $y'(t_0) = 0$, also dass

$$gt_0 = v\sin(\alpha) \qquad \text{und somit} \qquad t_0 = \frac{v\sin(\alpha)}{g}.$$

Es ist $y''(t_0) = -g < 0$, also ist t_0 eine Maximumstelle: dann erreicht *für festen Anfangsgeschwindigkeit und Abschusswinkel* die Kugel ihr Maximum

$$y(t_0) = \frac{v^2\sin(\alpha)^2}{2g}.$$

□

Ebenfalls kann man alle Resultate, welche nicht auf die Anordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$ beruhen, automatisch erweitern. Funktionen dieser Art heißen üblicherweise **Kurven in** $\mathbb{R}^M$, vgl. [**6**, Kap. 14]. Aufgrund dessen werden wir im Folgenden nur *reellwertige* Funktionen mehrerer Variable betrachten. Den allgemeinen Fall einer vektorvertiger Funktion mehrerer Variablen (eines sogenannten *Vektorfeldes*) lässt sich jedoch (im Großen und Ganzen) komponentenweise auf die Theorie *reellwertige* Funktionen mehrerer Variable zurückführen, vgl. [**6**, Kap. 16].

Beispiel 11.2. Man sieht an Beispiel 11.1, dass die Wahl der Abhängigkeiten einer Funktion am Modell liegt. Wären z.B. die Anfangsgeschwindigkeit, der Abschusswinkel und ja sogar die Fallbeschleinigung nicht fest, so kann man sich fragen, wie hängt jetzt die Flugbahn von diesen mehreren Variablen ab. Die Antwort wird von einer Funktion

$$f : (0,\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0,\infty) \times (0,\infty) \ni (v,\alpha,g,t) \mapsto \begin{pmatrix} x(v,\alpha,g,t) \\ y(v,\alpha,g,t) \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei die Funktionen x, y vierer Variablen durch

$$x : (v,\alpha,g,t) \mapsto vt\cos(\alpha) \quad \text{und} \quad y : (v,\alpha,g,t) \mapsto -\frac{gt^2}{2} + vt\sin(\alpha)$$

definiert sind.

Diese Funktionen x und y (und somit auch f) sind stetig, wie man schon anhand der Hilfsmittel vom Kapitel 8 hätte beweisen können. Die Flugbahn einer Kugel ist aber eine sehr glatte Kurve in der Luft: ist unsere anschauliche Vorstellung der Differenzierbarkeit einer Funktion korrekt, so würde man erwarten, f ist – in einem noch zu präzisierenden Sinne – differenzierbar. □

Im Folgendem bezeichnen wir für jedes $i = 1,\dots,n$ den Vektor $e_i = (0,\dots,1,\dots,0) \in \mathbb{R}^N$, wobei die 1 an der i-te Stelle sich befindet. Ist $A \subset \mathbb{R}^N$ offen, so ist $x + he_i \in A$ für alle $x \in A$ und $h \in \mathbb{R}$ aus einem Intervall $(-\varepsilon,\varepsilon)$ klein genug. So kann man in einem passenden Definitionsbereich die *i-te partielle Funktion $h \mapsto f(x_0 + he_i)$ an der Stelle x_0* definieren.

Definition 11.3. *Sei $A \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in A$. Existiert die Ableitung der i-ten partiellen Funktion an der Stelle x_0, d.h. der Grenzwert*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h},$$

*für ein $i \in \{1,\dots,N\}$, so nennt man ihn die **partielle Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung e_i**. Die Funktion f heißt dann **in x_0 in Richtung e_i partiell differenzierbar**. Ist f in x_0 in Richtung e_i für jedes $i = 1,\dots,n$ differenzierbar, so heißt f **in x_0 partiell differenzierbar**. Ist f in jedem $x_0 \in A$ partiell differenzierbar, so heißt f schlicht **partiell differenzierbar**.*

Wir bekräftigen, dass sich die Notation von der Notation im 1-dimensionalen Fall unterscheidet. Die Einführung des Symbols ∂ geht auf Adrien-Marie Legendre zurück, sie wurde üblich nachdem 1841 Carl Gustav Jacob Jacobi sie wieder einführte.

Ist f auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ definiert, so benutzt man oft die Bezeichnung (x,y) bzw. (x,y,z) statt (x_1,x_2,x_3) für ihre Variablen. Dementsprechend werden oft die partielle Ableitungen mit $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ bezeichnet. Vorsicht! In diesem Fall bezeichnet x nicht mehr einen Vektor aus $\mathbb{R}^N$ ist, sondern eine reelle Zahl.

Die Grundidee der partiellen Differentiation in Richtung e_i ist also, die anderen Koordinaten der Argumente von f "einzufrieren", und bzgl. der i-te Koordinate so abzuleiten, als ob f Funktion *einer* Variable wäre: anders gesagt, eine übliche Ableitung der i-ten partielle Funktion zu berechnen.

Beispiel 11.4. Betrachte die Funktion aus Beispiel 11.2. Wir zeigen, dass ihre beide Komponenten partiell differenzierbar sind. Für die erste Komponente x gilt also

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \lim_{h\to 0} \frac{(v+h)t\cos(\alpha) - vt\cos(\alpha)}{h} = t\cos(\alpha)\lim_{h\to 0}\frac{(v+h)-v}{h} = t\cos(\alpha),$$

da für den betrachteten Grenzwert t und $\cos(\alpha)$ die Rolle von Konstanten spielen. Ähnlich gilt

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \lim_{h\to 0} \frac{vt\cos(\alpha+h) - vt\cos(\alpha)}{h} = vt\lim_{h\to 0}\frac{\cos(\alpha+h)-\cos(\alpha)}{h} = -vt\sin(\alpha).$$

Weiter gilt
$$\frac{\partial x}{\partial g} = 0,$$
weil die Funktion x nicht von g abhängt, und schließlich
$$\frac{\partial x}{\partial t} = \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h)\cos(\alpha) - vt\cos(\alpha)}{h} = v\cos(\alpha) \lim_{h\to 0} \frac{(t+h)-t}{h} = v\cos(\alpha).$$
Ähnlich kann man sehen, dass die partielle Ableitungen der Funktion y
$$\frac{\partial y}{\partial v} = t\sin(\alpha), \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = vt\cos(\alpha), \qquad \frac{\partial y}{\partial g} = -\frac{t^2}{2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -gt + v\sin(\alpha) \tag{11.1}$$
betragen. □

Definition 11.5. *Sei $A \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in A$ partiell differenzierbare Funktion. Der N-Spaltenvektor*
$$\nabla f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) \end{pmatrix}$$
heißt ***Gradient*** *von f in x_0 (Aussprache: "Nabla-f").*

Anmerkung 11.6. Anders als die Differenzierbarkeit von Funktionen einer Variablen gewährleistet die partielle Differenzierbarkeit einer Funktionen mehrerer Variablen f die Stetigkeit von f nicht. Betrachte z.B.
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Die Funktion f ist dann in 0 partiell differenzierbar mit
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0);$$
doch ist sie dort unstetig, wie man sieht, indem dass man die Folgen
$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
betrachtet. Denn beide sind Nullfolgen in $\mathbb{R}^2$, doch ist
$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$
während
$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{1}{2}$$

Anmerkung 11.7. Im Beispiel 11.1 war der Definitionsbereich von f das kartesische Produkt dreier offener Intervalle. Man kann zeigen, dass Produkte offener Intervalle immer offen im Produktraum (in diesem Fall, $\mathbb{R}^3$) ist. Doch ist nicht jede in $\mathbb{R}^N$ offene Menge ein kartesisches Produkt: ein Gegenbeispiel liefern alle ε-Umgebungen
$$U_\varepsilon(x_0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{i0})^2} < \varepsilon. \right\}$$

Übungsaufgabe 11.8. (1) Sei $\alpha \in \mathbb{N}^N$ ein *Multiindex der Länge* $|\alpha|$, d.h., $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N}$ und $|\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j$. Definiere für $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ die Potenz $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N} \in \mathbb{R}$.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ und $a_\alpha \in \mathbb{R}$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \le k$. Dann heißt $f(x) := \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha x^\alpha$ ein *multivariates Polynom* vom Grad $k \in \mathbb{N}$ (und ist für $N \neq 1$ *kein* übliches Polynom!). Zeige, dass f und alle ihre partielle Ableitungen stetig sind.

(2) Sei f ein *homogenes* multivariates Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}$, d.h., $f(x) = \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha$. Zeige, dass $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$ und alle $\lambda \ge 0$.

Übungsaufgabe 11.9. Bestimme die partiellen Ableitungen der Funktion f, die folgendermaßen definiert ist.

(1) $f(x, y, z) := \exp(xyz^2)$;
(2) $f(x, y) := \log(\frac{x}{y})$;
(3) $f(x, y) := \cosh(x) \cdot \sinh(y)$.

Man merke, dass die partielle Ableitung in Richtung e_i selbst eine Funktion von A nach $\mathbb{R}$ ist, falls f in ganz A in Richtung e_i partiell differenzierbar ist. Sie kann somit selbst differenzierbar sein.

Definition 11.10. *Sei $A \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in A$ in Richtung e_j differenzierbare Funktion. Ist $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ selber in x_0 in Richtung e_i differenzierbar, d.h., existiert der Grenzwert*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + he_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)}{h}$$

*für ein $i \in \{1, \dots, N\}$ so nennt man ihn die **2. partielle Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung e_j und dann e_i**. Die Funktion f heißt dann **in x_0 in Richtung e_j und dann e_i partiell differenzierbar**. Ist f in x_0 in Richtung e_i und dann e_j für jede $i, j = 1, \dots, n$ differenzierbar, so heißt f **in x_0 2-mal partiell differenzierbar**. Ist f in jedem $x_0 \in A$ 2-mal partiell differenzierbar, so heißt f schlicht **2-mal partiell differenzierbar**.*

Dementsprechend definiert man den Begriff von n-mal Differenzierbarkeit für $n \in \mathbb{N}^*$ beliebig.

*Eine **glatte Funktion** ist eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, welche für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ n-mal partiell differenzierbar ist.*

Die 2. partielle Ableitung in der einzigen Richtung e_i bezeichnet man mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_i}$$

und allgemeiner

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n} := \frac{\partial f}{\partial x_i \dots \partial x_i}$$

Man nennt die partielle Ableitung der Form $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *gemischte Ableitung*, falls $i \neq j$. Falls beide existieren, müssen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ übereinstimmen? Im Allgemeinen nicht.

Beispiel 11.11. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f stetig, mit $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Um das zu überprüfen reicht es zu zeigen, dass f an der Stelle 0 stetig ist: denn anderswo ist sie offensichtlich stetig als Summe und Quotient (mit nichtverschwindendem Nenner) stetiger Funktionen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und setze $\delta := \sqrt{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\sqrt{x^2 + y^2} \le \delta$ auch $|f(x, y)| \le |xy|$ (weil aus $-y^2 \le y^2$ folgt $x^2 - y^2 \le x^2 + y^2$) und somit

$$|f(x, y)| \le |xy| \le x^2 + y^2 \le \delta^2 = \varepsilon.$$

Dabei haben wir benutzt, dass

$$0 \leq (x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy,$$

und somit

$$|xy| \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq x^2 + y^2.$$

Weiter gilt es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{xy^4 + 4x^3y^2 - x^5}{(x^2+y^2)^2}$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{(5x^4 - 12x^2y^2 - y^4)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + (-x^5 + 4x^3y^2 + xy^4)(4x^3 + 4xy^2)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)(4yx^2 + 4y^3)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}.$$

Insbesondere gilt es $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. □

Übungsaufgabe 11.12. Zeige, dass ein multivariates Polynom eine glatte Funktion ist.

Der folgende Satz wird üblicherweise auf Hermann Amandus Schwarz zurückgeführt. Er wurde allerdings erst 1743 von Alexis Claude Clairaut in einem Essay über Erdvermessung bewiesen, und ist gelegentlich auch als "Satz von Clairaut" bekannt. Wir formulieren ihn ohne Beweis.

Satz 11.13 (Satz von Schwarz). *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine 2-mal partiell differenzierbare Funktion, deren 2. partielle Ableitungen auch auf ganz A stetig sind. Dann stimmen die gemischten 2. partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ auf ganz A für alle $1 \leq i, j \leq n$ überein.*

Anmerkung 11.14. Man merke, dass insbesondere ist – unter den Voraussetzungen des Satzes von Schwarz – die $N \times N$-Matrix

$$Hf(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

für alle $x_0 \in A$ symmetrisch. Diese Matrix – und vor allem ihre Determinante – wurden 1842 von Ludwig Otto Hesse eingeführt und untersucht, und ist somit als *Hessematrix* bekannt.

Übungsaufgabe 11.15. Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare Funktion, deren 2. partielle Ableitungen stetig sind. Man bezeichnet durch Δf die stetige Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, die durch

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

definiert ist. Löst f die *Laplacesche Gleichung* $\Delta f = 0$, so heißt f *harmonisch.* Zeige: für $d = 2$ bzw. $d = 3$ sind die Funktionen $f_{(2)}$ bzw. $f_{(3)}$ harmonisch, wobei

$$f_{(2)}(x,y) := -\frac{\log \sqrt{x^2+y^2}}{2\pi}, \qquad f_{(3)}(x,y,z) := -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

In der Theorie des Elektromagnetismus bzw. der Gravitation wird $f_{(3)}$ *Coulombsches* (nach Charles Augustin de Coulomb) bzw. *Newtonsches Potential* genannt.

Übungsaufgabe 11.16. Seien f, g 2-mal differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $A \subset \mathbb{R}^N$. Zeige, dass

$$\Delta(f \cdot g) = \Delta f \cdot g + 2(\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} g) + f \cdot \Delta g.$$

Wollen wir das sämtliche Verhalten der Funktion f berücksichtigen, anstatt nur das Verhalten bzgl. der einzelnen Richtungen, und wollen wir uns von der Theorie der Funktionen einer Variablen inspirieren lassen, so sind wir an die Bedingung der 1-dimensionalen Differenzierbarkeit angewiesen, deren Äquivalenz zur herkömmlichen Definition im Satz 9.7 bewiesen wurde.

Definition 11.17. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f in $x_0 \in A$ **total differenzierbar** oder einfach **differenzierbar**, falls ein Vektor $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^N$ und eine Restfunktion $R : A \times A \to \mathbb{R}$ existiert, sodass*

$$f(x) = f(x_0) + \Phi \cdot (x - x_0) + R(x, x_0),$$

d.h.

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{N} \varphi_i (x_i - x_{0i}) + R(x, x_0),$$

wobei

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{0i})^2}} = 0,$$

*d.h., in der Landau-Notation, $R(x, x_0) = o(\|x - x_0\|)$. In diesem Fall bezeichnet man oft den N-Zeilenvektor (bzw. die $1 \times N$-Matrix) Φ mit $Df(x_0)$ oder $f'(x_0)$, welcher die **Jacobimatrix** oder das **Differential** von f in x_0 heißt.*

Die Jacobimatrix wurde 1815 von Cauchy eingeführt und 1841 ausführlich von Carl Gustav Jacob Jacobi untersucht.

Die Existenz einer solcher Jacobimatrix scheint schwiering nachzuprüfen. Eine hinreichende Bedingung sowie eine Darstellung erhalten wir im nächsten

Satz 11.18. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge, $x_0 \in A$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) Ist f in x_0 differenzierbar, so ist sie dort stetig und auch partiell differenzierbar, und es gilt

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) \right) = (\nabla f(x_0))^T.$$

(2) Ist umgekehrt f auf ganz A partiell differenzierbar, und sind ihre partielle Ableitungen stetig, so ist sie auch differenzierbar.

Beweis. (1) Ist $f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^N \varphi_i(x_i - x_{0i}) + o(\|x - x_0\|)$, so ist

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i (x_i - x_{0i}) + o(\|x - x_0\|)$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \sum_{i=1}^{N} |\varphi_i| \lim_{x_i \to x_{0_i}} \|x_i - x_{0i}\| + \lim_{x \to x_0} o(\|x - x_0\|) = 0.$$

Ähnlich gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_j) - f(x_0)}{h} = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \lim_{h \to 0} \frac{h(e_j)_i}{h} + \lim_{h \to x_0} \frac{o(|h|)}{h} = \varphi_j,$$

d.h., wenn die Jacobimatrix existiert stimmt die partielle Ableitung in Richtung e_j mit der j-te Koordinate der Jacobimatrix überein. □

Die Umkehrungen der Implikationen in (1) sind im Allgemeinen falsch, vgl. das folgende

Beispiel 11.19. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

definiert. Man kann überprüfen, dass f stetig und partiell differenzierbar ist, doch ist sie nicht differenzierbar (weil ihre partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ in 0 nicht stetig ist): es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xy^3}{2(x^2+y^2)^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

und somit ist entlang der Diagonale $y = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{4}$$

während entlang der x-Achse ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0.$$

□

Übungsaufgabe 11.20. Folgere aus den Rechenregeln für differenzierbare Funktionen einer Variablen (Satz 9.11) entsprechende Regeln für die partielle Ableitungen einer partiell differenzierbaren Funktion. Anhand vom Satz 11.18 schließe auf ähnliche Regeln für die Jacobimatrix einer differenzierbaren Funktion.

Den Begriff von Maximum und Minimum einer Funktion mehreren Variablen haben wir schon in der Definition 8.50 eingeführt. Jetzt möchten wir Kriterien zur Bestimmung von Extremstellen vorstellen, welche die ähnlichen Kriterien für die Funktionen einer Variable ergänzen.

Definition 11.21. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist für $x_0 \in A$ $\nabla f(x_0) = 0$, so heißt x_0* ***stationärer Punkt*** *von f.*

Satz 11.22. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist $x_0 \in A$ eine lokale Maximum- oder Minimustelle von f, so ist x_0 ein stationärer Punkt von f.*

Beweis. Sei x_0 eine lokale Maximum- bzw. Minimumstelle für f. Dann ist x_0 insbesondere eine Maximum- bzw. Minimumstelle für alle partielle Funktionen $h \mapsto f(x_0 + he_i)$, welche – aufgrund der Differenzierbarkeit von f – selber differenzierbar sind. Laut Satz 9.23 haben somit alle partielle Funktionen auch verschwindende Ableitung in $h = 0$. Folglich verschwinden alle partielle Ableitungen von f in x_0, d.h., $\nabla f(x_0) = 0$. □

Beispiel 11.23. Wir betrachten wieder die Funktion y aus Beispiel 11.4. Wir fassen sie aber nur als Funktion der Zeit t und des Abschusswinkels α auf, also $y : (0,\infty) \times (0, \frac{\pi}{2})$. Hat eine solche Funktion zweier Variablen ein Maximum (t_0, α_0), so muß er ein stationärer Punkt sein. Vermöge von (11.1) ist

$$\nabla f(t,\alpha) = \begin{pmatrix} -gt + v\sin(\alpha) \\ vt\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Damit $\nabla f(t,\alpha) = 0$ muss insbesondere $t\cos(\alpha) = 0$ sein, und somit $t = 0$ oder $\cos(\alpha) = 0$, also $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da für alle $k \in \mathbb{Z}$ $(0, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ nicht im Definitionsbereich der Funktion y liegt, hat die betrachtete Funktion y kein Extremum.

Die Umkehrung vom Satz 11.22 gilt nicht: es gibt stationäre Punkte, welche weder Maximum- noch Minimumstellen sind. Das ist typischerweise der Fall, wenn eine Funktion *in einer Richtung wachsend und in einer anderen Richtung fallend ist.*

Beispiel 11.24. Betrachte die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, die durch

$$f(x,y) := x^2y^3$$

definiert ist. Diese Funktion ist differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2.$$

Also verschwindet $\nabla f(x_0,y_0)$ genau dann, wenn $2x_0y_0^3 = 3x_0^2y_0^2 = 0$, also genau dann, wenn $x_0 = 0$ oder $y_0 = 0$. Somit ist $(0,0)$ ein stationärer Punkt, doch weder eine Maximum- noch eine Minimustelle, denn z.B. entlang der Linie $x = y$ nimmt die Funktion Werte $f(x,x) = x^5$ an, sodass $f(x_1,x_1) < f(0,0) < f(x_2,x_2)$ für alle x_1,x_2 mit $x_1 < 0 < x_2$. □

Man benötigt also ein weiteres Kriterium, welche die Bestimmung von Extremstellen erlaubt. Dies wird im Folgenden vorgestellt.

Wir schließen also dieses Kapitel mit der Untersuchung von Maxima und Minima einer Funktion – zunächst im 2-dimensionalen ($A\subset\mathbb{R}^2$) und dann im allgemeinem Fall. Dazu benutzt man wesentlich, die Möglichkeit eine Taylorentwicklung einer 2-mal differenzierbarer Funktion voranzutreiben.

Satz 11.25 (Taylorentwicklung von Funktionen mehrerer Variablen). *Sei $A\subseteq\mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $f:A\to\mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare Funktion mit stetigen 2. partiellen Ableitungen. Seien $a,x_0\in A$. Ist $N=2$, dann gilt die Taylorentwicklung*

$$\begin{aligned} f(a) \quad &= \quad f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(a_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(a_2 - x_{02}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)(a_1 - x_{01})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)(a_1 - x_{01})(a_2 - x_{02}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)(a_2 - x_{02})^2 + O(|a - x_0|^3). \end{aligned}$$

von f in x_0, wobei wir die Landau-Notation (vgl. Definition 5.42) benutzt haben. Für N beliebig wird die obige Formel durch

$$f(a) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(a - x_0) + \frac{1}{2}(a - x_0)^T Hf(x_0)(a - x_0) + O(|a - x_0|^3)$$

verallgemeinert, wobei $\nabla f(x_0)$ den Gradient und $Hf(x_0)$ die Hessematrix von f in x_0 bezeichnen.

Beispiel 11.26. Betrachte die Funktion $\sqrt{x}\sin(y)$. Um die Taylorentwitcklung von f in $(1,\frac{\pi}{2})$ zu bestimmen berechne die 1. sowie die 2. partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sin(y)}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x}\cos(y),$$

und (auch dank dem Satz von Schwarz)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{\sin(y)}{4\sqrt{x^3}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\cos(y)}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\sqrt{x}\sin(y),$$

also

$$\nabla f\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},0\right)$$

sowie

$$Hf\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also wird f in $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ durch

$$f(x,y) = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + O\left(|(x,y) - \left(1,\frac{\pi}{2}\right)|^3\right)$$

entwickelt. □

Übungsaufgabe 11.27. Man bestimme die Taylorentwicklung der Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

(1) $f(x,y) := \frac{2x-y}{2x+y}$ und
(2) $g(x,y,z) := \sin(xyz)$

definiert sind, in einer Umgebung der Stelle $(\frac{1}{2}, 1)$ bzw. an der Stelle $(0, \pi, 0)$.

Den Beweis vom folgendem Resultat kann man z.B. im [**5**, § 2.5] finden.

Satz 11.28. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare Funktion, deren 2. Ableitungen auch auf ganz A stetig sind. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) Ist $x_0 \in A$ eine lokale Maximum- bzw. Minimustelle von f, so ist die Matrix $Hf(x_0)$ negativ bzw. positiv semidefinit[1]*.*
(2) Ist $x_0 \in A$ ein stationärer Punkt von f und ist die Matrix $Hf(x_0)$ negativ bzw. positiv definit[2]*, so ist x_0 eine lokale Maximum- bzw. Minimumstelle.*

Übungsaufgabe 11.29. (1) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch $f(x,y) = x^2 - xy$ definiert wird. Hat die Funktion lokale Maxima oder Minima?
(2) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch $f(x,y) = e^x(1 - \cos y)$ definiert wird. Berechne die Hessematrix von f und untersuche f auf Extrema an den Stellen $(0,0)$, $(\pi, 0)$ und $(0, \pi)$.
(3) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch $f(x,y) = -\cos(x^2y^2)$ definiert wird. Berechne die Hessematrix von f und untersuche f auf Extrema.

Zum Schluss betrachten wir eine ähnliche Fragestellung: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, kann man eine Maximum- oder Minimumstelle (x_0, y_0) von f finden, welche gleichzeitig eine oder mehrere weitere Bedingungen erfüllt? Eine Teillösung wurde von Joseph-Louis Lagrange gefunden: er löste damit 1788 manche konkreten Probleme der Mechanik und formuliert 1797 ein allgemeines Prinzip, welches wir ohne Beweis vorstellen.

Satz 11.30 (Lagrange-Multiplikatoren). *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f, F : A \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktion. Sei $(x_0, y_0) \in A$ ein stationärer Punkt von f, sodass gleichzeitig die Nebenbedingung*

$$F(x_0, y_0) = 0$$

erfüllt ist. Ist

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \qquad \textit{oder} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

so existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \textit{und} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Untersucht man also f auf Extrema, so ist man darauf hingewiesen, einen *Lagrange-Multiplikator* λ zu finden. Den Beweis sowie eine Erweiterung zum allgemeinen N-dimensionalen Fall findet man in [**5**, § 3.6].

Beispiel 11.31. Für $\alpha > 0$ betrachte die Funktion $f : A := \{p \in \mathbb{R}^2 : p_1, p_2 > 0\} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(p_1, p_2) := -p_1 \log_\alpha p_1 - p_2 \log_\alpha p_2$$

---

[1]Zur Erinnerung: Eine $n \times n$ symmetrische Matrix A heißt *positiv semidefinit*, falls $x^T A x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$. Sie heißt *negativ semidefinit*, falls $-A$ positiv semidefinit heißt. Äquivalent heißt eine Matrix positiv bzw. negativ semidefinit, falls alle ihre Eigenwerte ≥ 0 bzw. ≤ 0 sind. Die Eigenwerte einer Matrix können u.a. leicht durch `maple` berechnet werden.

[2]Zur Erinnerung: Eine $n \times n$ symmetrische Matrix A heißt *positiv definit*, falls $x^T A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Sie heißt *negativ definit*, falls $-A$ positiv definit heißt. Äquivalent heißt eine Matrix positiv bzw. negativ definit, falls alle ihre Eigenwerte > 0 bzw. < 0 sind.

definiert wird. Betrachte die Nebenbedingung $F(p_1, p_2) = 0$, wobei

$$F(p_1, p_2) := p_1 + p_2 - 1,$$

was in der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie heißt, dass (p_1, p_2) eine *diskrete Wahrscheinlichkeits-verteilung* ist. Falls $\alpha = 2$ heißt dann $f(p_1, p_2)$ in der theoretischen Informatik *Informationsentropie von* p_1, p_2. Wir wollen die stationären Punkte (und wenn möglich die Extrema) unter der gegebenen Nebenbedingung bestimmen.

Sei $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^N$ ein stationärer Punkt von f, so existiert $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass die Identität $Df(p_1, p_2) = \lambda DF(p_1, p_2)$ gilt. Dies liefert das System

$$\begin{cases} p_1 + p_2 &= 1, \\ -\log_2 p_1 &= \lambda + \frac{1}{\log \alpha}, \\ -\log_2 p_2 &= \lambda + \frac{1}{\log \alpha}. \end{cases}$$

Es folgt, dass $p_1 = p_2$ und somit auch, aufgrund der Nebenbedingung $p_1 + p_2 = 1$, dass $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. Der einzige stationäre Punkt von f unter der Nebenbedingung ist also durch $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gegeben. Dort ist $f(p_1, p_2) > 0$. Man schließt, dass f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Maximum annimmt. Also ist die Gleichverteilung die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit grössten Informationsentropie. $\square$

KAPITEL 12

Gestellte Übungsaufgaben (zusammengestellt von Moritz Gerlach)

ÜBUNGSAUFGABE 12.1. Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Gib eine kurze Begründung.

Schreibweisen: $\exists n \in \mathbb{N}$: „Es gibt (mindestens) eine natürliche Zahl n“, $\forall x \in \mathbb{R}$: „Für alle reellen Zahlen x“, $A \implies B$: „Wenn A gilt, so gilt auch B“, $A \iff B$ „A gilt genau dann, wenn B gilt“.

(a) $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt: $a^2 > 2 \implies a > \sqrt{2}$

Lösung: Diese Aussage ist falsch. Um zu sehen, dass dies nicht für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt, betrachte z.B. $a = -2$. Dann ist zwar $a^2 = 4 > 2$, jedoch $a < \sqrt{2}$.

(b) $\exists x, y \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $x^2/y - 2x - \sqrt{y} = 2$

Lösung: Dies ist eine wahre Aussage, denn die Gleichung wird z.B. für $x = 3$ und $y = 1$ erfüllt.

(c) $\exists n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n < -3 \implies \exists m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $m < 0$.

Lösung: Dies ist eine wahre Aussage. Wenn eine solche Zahl n existieren würde, so gäbe es auch ein m mit der gewünschten Eigenschaft (wähle z.B. $m = n$). Es wird in der Aussage nicht behauptet, es gäbe negative natürliche Zahlen (was ja auch nicht der Fall ist). Da die Voraussetzung „Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n < -3$“ nicht zu erfüllen ist, ist die Aussage jedoch unbrauchbar.

(d) Es gilt: $bx = a \iff x = a/b \ \forall a, b, x \in \mathbb{R}$

Lösung: Diese Aussage ist nur „fast richtig“ und daher falsch! Wählt man $b = 0$, so folgt aus $bx = a$ nicht $x = a/b$, denn a/b ist nicht definiert und bezeichnet daher keine Zahl.

ÜBUNGSAUFGABE 12.2. Es seien A und B zwei (mathematische) Aussagen und $\neg A$, $\neg B$ ihre Negationen ($\neg A$ gilt genau dann, wenn A nicht gilt). Zeige, dass $A \implies B$ äquivalent zu $\neg B \implies \neg A$ ist (d.h. aus A folgt B genau dann, wenn aus nicht B nicht A folgt).

Lösung: Es gelte $A \implies B$ und die Aussage B sei falsch ($\neg B$ sei wahr). Wäre es nun möglich, dass die Aussage A wahr ist, so folgt aus der Vorraussetzung, dass auch B wahr ist, was jedoch nicht stimmt. Also gilt $\neg B \implies \neg A$.

Nun gelte $\neg B \implies \neg A$ und die Aussage A sei wahr. Wäre es nun möglich, dass B falsch ist, so wäre nach Vorraussetzung auch A falsch, was nicht stimmt. Also folgt $A \implies B$.

ÜBUNGSAUFGABE 12.3. Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $|a| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Zeige, dass daraus $a = 0$ folgt.

Hinweis: Verwende Aufgabe 12.2.

Konvention: Schreibt man „für alle $b > 0$“ oder „für ein $b < 3$“ ohne Angabe der Menge, aus der b stammt, so ist darunter stets $b \in \mathbb{R}$ zu verstehen.

Lösung: Es sei $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dann ist $|a| \neq 0$. Wählt man $\varepsilon = |a|$ so ist $\varepsilon > 0$ jedoch $|a| \not< \varepsilon$. Die Aussage „$|a| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$“ ist also falsch. Damit ist, mit den Bezeichnungen aus 12.2, $\neg B \implies \neg A$ gezeigt, was gleichbedeutend mit der zu zeigenden Behauptung ist.

ÜBUNGSAUFGABE 12.4. Betrachte folgendes Mengensystem $\mathcal{S} = \{\{2,4,5\}, \{2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$, also eine Menge von Mengen.

(a) Bestimme $\bigcup_{M\in\mathcal{S}} M$ und $\bigcap_{M\in\mathcal{S}} M$.

Lösung: Es ist $\bigcup_{M\in\mathcal{S}} M = \{1,2,3,4,5\}$ und $\bigcap_{M\in\mathcal{S}} M = \{2,4\}$

(b) Bestimme die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathcal{S})$.

Lösung: Die Menge $\mathcal{S}$ hat drei Elemente (die in diesem Fall wieder Mengen sind). Die Teilmengen von $\mathcal{S}$ sind also all jene Mengen, die aus diesen drei Elementen gebildet werden können. Daher ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(S) = \{\emptyset, \{\{2,4,5\}\}, \{\{2,4\}\}, \{\{1,2,3,4\}\}, \{\{2,4,5\},\{2,4\}\},\\ \{\{2,4,5\},\{1,2,3,4\}\}, \{\{2,4\},\{1,2,3,4\}\}, \mathcal{S}\}\end{aligned}$$

(c) Bestimme $\mathcal{S}\backslash\{\bigcup_{M\in\mathcal{S}} M\}$ sowie $\mathcal{S}\backslash\{\bigcap_{M\in\mathcal{S}} M\}$.

Lösung: Es ist

$$\mathcal{S}\backslash\{\bigcup_{M\in\mathcal{S}} M\} = \mathcal{S}\backslash\{\{1,2,3,4,5\}\} = \mathcal{S}$$

und

$$\mathcal{S}\backslash\{\bigcap_{M\in\mathcal{S}} M\} = \mathcal{S}\backslash\{\{2,4\}\} = \{\{2,4,5\},\{1,2,3,4\}\}$$

(d) Bestimme bezüglich der Grundmenge $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ die Komplemente $\left(\bigcap_{M\in\mathcal{S}} M\right)^c$ und $\emptyset^c$.

Lösung: Das Komplement einer Menge $M \subset X$ ist $M^c = X\backslash M$. Daher gilt

$$\Big(\bigcap_{M\in\mathcal{S}} M\Big)^c = \{0,1,3,5\} \text{ sowie } \emptyset^c = X\backslash\emptyset = X$$

Übungsaufgabe 12.5. Finde jeweils eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $f : \{2,5,7,8\} \to \{2,3,4,5\}$ bijektiv

Lösung: Man setze z.B. $f(2) = 5$, $f(5) = 3$, $f(7) = 2$, $f(8) = 4$. Man mache sich klar, jede Funktion $f : \{2,5,7,8\} \to \{2,3,4,5\}$ injektiv ist, genau dann, wenn sie surjektiv ist, genau dann, wenn sie bijektiv ist, weil die Mengen gleich viele Elemente haben.

(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv, aber nicht surjektiv

Lösung: Man setze z.B. $f(n) = 2n$. Dann ist offenbar $f(n) = 2n \neq 2m = f(m)$ für alle $n \neq m$, weshalb f injektiv ist. Da $f(n)$ für kein $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist, ist f nicht surjektiv.

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjektiv, aber nicht injektiv

Lösung: Man setzte z.B. $f(0) = 0$ und $f(n) = n-1$ für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, dass $f(m+1) = m$, weshalb f surjektiv ist. Da $f(0) = f(1) = 0$, ist f nicht injektiv.

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ bijektiv.

Lösung: Setze $f(n) = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(-n) = 2n-1$ für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $f(n) = m$.

Man kann also allen ganzen Zahlen genau eine natürliche Zahl zuordnen. In diesem Sinn gibt es also gleich viele ganze wie natürliche Zahlen! Man sagt „$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig".

Übungsaufgabe 12.6. Zeige, dass folgende Mengen M abzählbar sind.

(a) $M := \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$ mit abzählbar unendlichen Mengen M_k für $k \in \mathbb{N}$.

Lösung: Es sei $M_j = \{m_{j,1}, m_{j,2}, m_{j,3}, \dots\}$. Mit dem Cantorschen Diagnonalverfahren erhält man für M die Abzählung

$$M = \{m_{1,1}, m_{2,1}, m_{1,2}, m_{1,3}, m_{2,2}, m_{3,1}, m_{4,1}, \dots\},$$

indem man der Reihe nach alle endlich vielen Elemente $m_{i,j}$ mit $i+j = 1,2,3,\dots$ aufzählt. Um eine bijektive Zuordnung zwischen den Elementen von M und den natürlichen Zahlen zu erhalten, sind hierbei bereits aufgezählte Elemente zu überspringen, denn die Mengen M_j sind nicht als paarweise disjunkt vorausgesetzt.

(b) $M := \mathbb{N}^k = \big\{(n_1, \dots, n_k) : n_j \in \mathbb{N} \text{ für } j = 1, 2, \dots, k\big\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$.

Lösung: Beweis durch Induktion nach k. Der Induktionsanfang $k = 1$ ist klar, da $\mathbb{N}^1 = \mathbb{N}$ nach Definition abzählbar ist. Nun sei die Menge $\mathbb{N}^{k-1}$ für ein $k > 1$ als abzählbar angenommen und ihre Elemente mit $m_1, m_2, m_3, \dots$ bezeichnet. Wegen $\mathbb{N}^k = \mathbb{N}^{k-1} \times \mathbb{N}$ erhält man nun mit dem Cantorschen Diagonalverfahren die folgende Abzählung von N^k:

$$N^k = \big\{(m_1, 1), (m_2, 1), (m_1, 2), (m_1, 3), (m_2, 2), (m_3, 1), (m_4, 1), \dots\big\},$$

indem der Reihe nach alle endlich vielen Tupel (m_i, j) mit $i + j = 1, 2, 3 \dots$ aufgezählt werden.

(c) $M := \big\{T \subset \mathbb{N} : T \text{ hat endlich viele Elemente}\big\}$

Lösung: Für ein $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet $N_k = \big\{0, 1, \dots, k\big\}$. Dann gibt es für jedes fest gewählte k nur endlich viele Teilmengen $T \subset N_k$ (genau 2^{k+1} viele, denn man hat für jedes Element aus N_k die Möglichkeit, es der Menge T hinzuzufügen oder nicht), die selbst notwendigerweise endlich sind. Ferner ist $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big\{T \subset N_k\big\}$, daher folgt die Behauptung entweder direkt aus Aufgabenteil (a) oder man zählt der Reihe nach alle Teilmengen von $N_0, N_1, N_2, \dots$ auf (und lässt dabei bereits gezählte Teilmengen aus). Letzteres ergibt die Abzählung

$$M = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{2\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\big\}.$$

Übungsaufgabe 12.7. Du bist Besitzer eines Hotels mit abzählbar unendlich vielen Zimmern. Eines Abends sind alle Zimmer belegt, es kommen aber noch abzählbar unendlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen Insassen vor das Hotel gefahren. Erkläre, wie du durch Neuverteilung der Zimmer alle Reisenden unterbringst, ohne einen Gast nach Hause schicken zu müssen oder ein Zimmer mehrfach zu belegen.

Lösung: Dieses scheinbare Paradoxon geht auf den Mathematiker David Hilbert (1862-1943) zurück und ist unter dem Namen *Hilberts Hotel* bekannt.

Nach Aufgabe 12.6 kommen insgesamt nur abzählbar unendlich viele Reisende an (als abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen). Die Menge der Neuankömmlinge kann also mit $\big\{n_1, n_2, n_3, \dots\big\}$ bezeichnet werden. Nun bittet man gleichzeitig alle Gäste ihre Zimmer zu wechseln, indem der Gast aus dem Zimmer mit der Nummer z in das mit der Nummer $2z$ umzieht. Anschließend hat jeder Hotelgast wieder sein eigenes Zimmer (weil die Zuordnung $z \mapsto 2z$ injektiv ist) und die Zimmer mit ungerader Nummer sind dabei nicht belegt und stehen den gerade angekommenen Reisenden zur Verfügung. Dabei bezieht z.B. Neuankömmling n_i das Zimmer mit der Nummer $2i - 1$.

Übungsaufgabe 12.8. (a) Zeige, dass jede endliche, nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Maximum und ein Minimum besitzt.

Lösung: Wir betrachten die Mengen $K = \big\{k \in \mathbb{N}, k \geq 1 : \text{alle } k\text{-elementigen Teilmengen von } \mathbb{R} \text{ besitzen ein Maximum und ein Minimum}\big\}$ und zeigen durch Induktion, dass $K = \mathbb{N}\backslash\big\{0\big\}$ gilt, woraus die Behauptung folgt.

- Induktionsanfang: Es sei $M = \big\{x\big\} \subset \mathbb{R}$ eine beliebige einelementige Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist offenbar x sowohl Minimum als auch Maximum von M. Also ist $1 \in K$
- Induktionsschritt: Es sei $k \in K$, d.h. alle k-elementigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ besitzen ein Maximum und ein Minimum. Nun sei $M \subset \mathbb{R}$ eine $k+1$-elementige Menge. Wir fixieren ein $x \in M$ und zerlegen $M = \big\{x\big\} \cup N$ mit $N = M\backslash\big\{x\big\}$. Dann ist N eine k-elementige Menge und besitzt nach Voraussetzung ein Maximum $m \in N$ und ein Minimum $n \in N$. Ist nun $x > m$, so ist x Maximum und n Minimum von M. Ist dagegen $x < n$, so ist m das Maximum und x das Minimum von M. Andernfalls ist m das Maximum und n das Minimum von M. Da M beliebig gewählt war, ist $k + 1 \in K$.

Also ist K eine induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$, die 1 enthält, weshalb $\mathbb{N}\backslash\big\{0\big\} \subset K$. Da nach Definition auch $K \subset \mathbb{N}\backslash\big\{0\big\}$ gilt, folgt $K = \mathbb{N}\backslash\big\{0\big\}$.

(b) Zeige, dass die Menge $M = \big\{1/n : n \in \mathbb{N}^*\big\}$ kein Minimum besitzt.

Lösung: Wir nehmen an, die Menge M besitzt das Minimum m. Dann ist $m \in M$ und daher $m = 1/n$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$. Nun ist aber $1/(n+1) < m$ und $1/(n+1) \in M$. Die Menge M besitzt also ein Element, das kleiner als m ist im Widerspruch zu unserer Annahme. Also besitzt M kein Minimum.

(c) Zeige, dass die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ kein Maximum besitzt.

Lösung: Wir nehmen an, die Menge M besitzt das Maximum m. Dann ist $0 \leq m < 1$. Für $a = (m+1)/2$ gilt jedoch, dass $0 \leq a = m/2 + 1/2 < 1$ weshalb $a \in M$. Ferner ist $a > m$, weshalb m kein Maximum von M gewesen sein kann.

Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ versehen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \cdot : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

heißt *Körper der komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$. Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ nennt man $\mathfrak{Re}(z) := x$ den *Real-* und $\mathfrak{Im}(z) := y$ den *Imaginärteil* von z sowie $\overline{z} := (x, -y)$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*. Der *Betrag* einer komplexen Zahl z ist definiert als $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ und entspricht dem euklidischen Abstand von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zum Ursprung. Die komplexe Zahl $(0, 1)$ heißt *imaginäre Einheit* und wird mit i bezeichnet.

Die reellen Zahlen werden durch den Körpermorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto (x, 0)$ in die komplexen eingebettet (für die komplexe Zahl $(x, 0)$ schreibt man auch kurz x).

Übungsaufgabe 12.9. Es sei $z \in \mathbb{C}$ und $x_1, y_1, x_2, y_2, x, y \in \mathbb{R}$. Zeige folgende Identitäten:

(a) $x + iy = (x, y)$ sowie $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Lösung: Es ist $x + iy = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, 0) + (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) = (x + 0, 0 + y)$ und deshalb auch $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

(b) $i^2 = -1$ sowie $i^{-1} = -i$

Lösung: Es ist $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1$. Aus Aufgabenteil (a) folgt $-i = (-1)i = (0, -1)$ und damit $i \cdot (-i) = (0, 1) \cdot (0, -1) = (-(-1), 0) = 1$

(c) $\mathfrak{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$ sowie $\mathfrak{Im}(z) = (z - \overline{z})/(2i)$

Lösung: Es sei $z = (x, y)$. Dann ist $z + \overline{z} = (x + x, y + (-y)) = (2x, 0) = 2x = 2\,\mathfrak{Re}(z)$. Mit (a) sieht man außerdem, dass $z - \overline{z} = (x - x, y - (-y)) = (0, 2y) = 2iy = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$.

(d) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

Lösung: Es sei $z = (x, y)$. Dann ist $z \cdot \overline{z} = (x, y) \cdot (x, -y) = (x \cdot x - y \cdot (-y), x(-y) + yx) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Aufgabe 12.9 (a) erlaubt die einfachere Darstellung $x + iy$ einer komplexen Zahl (x, y), mit der wie mit einem reellen Ausdruck gerechnet werden kann (unter Verwendung von $i^2 = -1$).

Übungsaufgabe 12.10. Bestimme jeweils Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen z und stelle sie in der komplexen Zahlenebene dar.

(a) $z = (1 + i)^5$

Lösung: Es ist $z = (1 + i)(2i)^2 = (1 + i)(-4) = -4 - 4i$ und deshalb $\mathfrak{Re}(z) = -4$, $\mathfrak{Im}(z) = -4$ und $|z| = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$.

(b) $z = (i + 1)/(i - 1)$

Lösung: Es ist

$$z = \frac{i + 1}{i - 1} \cdot \frac{-i - 1}{-i - 1} = \frac{(i + 1)(-i - 1)}{|i - 1|^2} = \frac{1 - i - i - 1}{2} = -i$$

und damit $\mathfrak{Re}\, z = 0$, $\mathfrak{Im}\, z = -1$ und $|z| = 1$.

(c) $z = (1 + i)/(1 - (1 + i)^2)$

Lösung: Es ist

$$z = \frac{1 + i}{1 - 2i} = \frac{(1 + i)(1 + 2i)}{|1 + 2i|^2} = \frac{-1 + 3i}{5}$$

und deshalb $\mathfrak{Re}(z) = \frac{-1}{5}$, $\mathfrak{Im}(z) = \frac{3}{5}$ sowie $|z| = \sqrt{2/5}$

(d) $z = (1-i)^4/(1+i)^5 - (1+i)^4/(1-i)^5$

Lösung: Mit $w = \frac{(1-i)^4}{(1+i)^5}$ ist $z = w - \overline{w}$ und wegen Aufgabe 12.9 (c) also $z = 2i\,\mathfrak{Im}(w)$. Nach (a) ist $w = \frac{(-2i)^2}{-4-4i} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$ und deshalb $\mathfrak{Im}(w) = -1/2$. Damit erhält man $\mathfrak{Re}(z) = 0$, $\mathfrak{Im}(z) = -1$ sowie $|z| = 1$.

Übungsaufgabe 12.11. Zeige, dass $|a-z| < |1-\overline{a}z|$ für alle $a, z \in \mathbb{C}$ mit $|a|, |z| < 1$.

Lösung: Es seien $a, z \in \mathbb{C}$, $|a|, |z| < 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& |a-z|^2 < |1-\overline{a}z|^2 \\
\iff\ & (a-z)(\overline{a}-\overline{z}) < (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) \\
\iff\ & |a|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + |z|^2 < 1 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2|z|^2 \\
\iff\ & 0 < 1 - |a|^2 - |z|^2 + |a|^2|z|^2 \\
\iff\ & 0 < (1-|a|^2)(1-|z|^2)
\end{aligned}$$

Die Ungleichung in der letzten Zeile ist wegen $|a|, |z| < 1$ offenbar erfüllt.

Übungsaufgabe 12.12. Es seien $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \le k < n$. Zeige, dass $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Lösung: Für beliebige $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k < n$ erhält man nach Definition des Binomialkoeffizienten

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \\
= \frac{(n-1)!}{(n-k)!k!}\big(k + (n-k)\big) &= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 12.13. Es seien $a, b \in \mathbb{C}$. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

(d) $(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1}$

Lösung:

(a) Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 0$ sind beide Seiten der Gleichung 0. Nun sei vorausgesetzt, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt und wir erhalten damit für den Nachfolger $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

(b) Beweis durch Induktion nach n. Für $n=0$ sind beide Seiten der Gleichung 0. Nun sei vorausgesetzt, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt und wir erhalten damit für den Nachfolger $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^4+2n^3+n^2+4n^3+12n^2+12n+4}{4} \\ &= \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

(c) Diese Gleichung ist auch als *Binomialsatz* bekannt. Es seien $a, b \in \mathbb{C}$ beliebig. Beweis durch Induktion nach n. Für $n=0$ sind beide Seiten der Gleichung 1. Nun sei vorausgesetzt, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt und wir erhalten damit für den Nachfolger $n+1$:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1}\end{aligned}$$

Wobei im vorletzten Schritt die Gleichung aus Aufgabe 12.12 angewendet wurde.

(d) Diese Summe ist auch als *Geometrische Summe* bekannt. Für $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}a^{k+1}b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k+1} \\ = \sum_{k=1}^{n+1}a^k b^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k+1} &= a^{n+1} - b^{n+1}\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 12.14. Berechne folgende Summen (mit Rechenweg):

(a) $\sum_{k=8}^{73} \sqrt{3}^k$

(b) $\sum_{k=1}^{77} \frac{1}{k(k+1)}$

(c) $\sum_{\nu=2}^{29} \binom{29}{\nu}$

(d) $\sum_{k=2}^{31} \left((k^2-2)^2 - k^4\right)$

Hinweis: Verwende Aufgabe 12.13. Die Ergebnisse müssen nicht in Dezimaldarstellung gebracht werden!

Lösung:

(a) Wir verwenden Aufgabe 12.13 (d) mit $a = \sqrt{3}$ und $b = 1$. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=8}^{73} \sqrt{3}^k \quad &= \quad \sum_{k=0}^{73} \sqrt{3}^k - \sum_{k=0}^{7} \sqrt{3}^k \\ = \frac{\sqrt{3}^{74} - 1}{\sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{3}^8 - 1}{\sqrt{3} - 1} \quad &= \quad \frac{3^{37} - 3^4}{\sqrt{3} - 1}\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\sum_{k=1}^{77} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{77} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{78} = \frac{77}{78}$$

(c) Wir verwenden Aufgabe 12.13 (c) mit $a = b = 1$ und erhalten:

$$\sum_{\nu=2}^{29} \binom{29}{\nu} = 2^{29} - 1 - 29 = 2^{29} - 30$$

(d) Mit Aufgabe 12.13 (a) erhält man:

$$\sum_{k=2}^{31} \left((k^2 - 2)^2 - k^4\right) = \sum_{k=2}^{31} \left(-4k^2 + 4\right) = -4\frac{31 \cdot 32 \cdot 63}{6} + 4 + 4 \cdot 30 = -41540$$

Übungsaufgabe 12.15. Es sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2$ sowie $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$. Zeige

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N - \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n)$$

wobei $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Lösung: Dieser Satz ist auch als *Abelsche partielle Summation* bekannt. Der Beweis kann durch Induktion oder direkt geführt werden.

- Beweis durch Induktion nach N:
  - Induktionsanfang: Für $N = 2$ erhält man

$$\begin{aligned}A_N b_N - \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n) \quad &= \quad (a_1 + a_2) b_2 - a_1 (b_2 - b_1) \\ = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad &= \quad \sum_{n=1}^{N} a_n b_n\end{aligned}$$

  - Induktionsschritt: Es gelte $\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N - \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n)$ für ein beliebiges aber festes $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2$. Zu zeigen ist nun, dass unter dieser Voraussetzung die Behauptung auch für

$N+1$ gilt. Man erhält

$$\begin{aligned} & A_{N+1}b_{N+1} - \sum_{n=1}^{N} A_n(b_{n+1}-b_n) \\ = \; & \left(\sum_{n=1}^{N} a_n + a_{N+1}\right) b_{N+1} - \sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_{n+1}-b_n) - A_N(b_{N+1}-b_N) \\ = \; & a_{N+1}b_{N+1} - \sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_{n+1}-b_n) + A_N b_N \\ = \; & a_{N+1}b_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N+1} a_n b_n \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Induktionsvoraussetzung eingegangen ist.

- Direkter Beweis: Es sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2$. Schreibt man nun

$$\sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_{n+1}-b_n) = \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{n} a_k(b_{n+1}-b_n)$$

so sieht man, dass genau über diejenigen $n,k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n < N$ summiert wird. Durch Vertauschung der Summationsreihenfolge erhält man

$$\begin{aligned} A_N b_N - \sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_{n+1}-b_n) \quad &= \quad A_N b_N - \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{n} a_k(b_{n+1}-b_n) \\ = A_N b_N - \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{n=k}^{N-1} a_k(b_{n+1}-b_n) \quad &= \quad A_N b_N - \sum_{k=1}^{N-1} a_k(b_N-b_k) \\ = A_N b_N - A_{N-1}b_N + \sum_{k=1}^{N-1} a_k b_k \quad &= \quad a_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} a_n b_n \\ &= \quad \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \end{aligned}$$

Da N beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

Übungsaufgabe 12.16. Bestimme das Infimum der folgenden Mengen $M \subset \mathbb{R}$ und entscheide, ob es sich um ein Minimum handelt:

(a) $M = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < \sqrt{2}\}$
(b) $M = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ und } 8 \leq x^2\}$
(c) $M = \{x \in \mathbb{Z} : -5 < x < 5\}$
(d) $M = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - x^3 + \sqrt{5} > 7\}$

Lösung:

(a) $\inf M = 1$ und wegen $1 \notin M$ ist 1 kein Minimum von M.
(b) $\inf M = 2\sqrt{2}$. Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist auch $2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und kann deshalb kein Minimum von M sein.
(c) Wegen $M = \{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$ ist $\inf M = \min M = -4$.
(d) Da die Menge nach unten unbeschränkt ist, existiert kein Minimum von M und es ist $\inf M = -\infty$.

Übungsaufgabe 12.17. Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leer und $z \in \mathbb{R}$. Wir setzen $-A = \{-x : x \in A\}$ sowie $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Beweise folgende Aussagen:

(a) $z = \sup A$ genau dann, wenn $x \leq z\ \forall x \in A$ und $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in A$ mit $x_n > z - 1/n$.

Lösung: Sei $z = \sup A$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da z eine obere Schranke von A ist, gilt $x \leq z\ \forall x \in A$. Da ferner z die kleinste obere Schranke von A ist, ist $z - 1/n$ keine obere Schranke von A, d.h. es gibt ein $x_n \in A$ mit der Eigenschaft $x_n > z - 1/n$.

Sei nun $z \in \mathbb{R}$ derart, dass $x \leq z\ \forall x \in A$ und dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A$ existiert mit $x_n > z - 1/n$. Dann ist z eine obere Schranke von A. Wir nehmen an, es gäbe eine kleinere obere Schranke s von A, d.h. $s < z$ und $x \leq s$ für alle $x \in A$. Wählt man nun $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $1/n < z - s$ (z.B. $n = \left[1/(z-s)\right] + 1$), dann existiert nach Voraussetzung ein $x_n \in A$ mit $x_n > z - 1/n$. Da $z - 1/n > z - (z - s) = s$ ist $x_n > s$, weshalb s keine obere Schranke gewesen sein kann. Also ist z die kleinste obere Schranke von A.

(b) $\inf A = -\sup(-A)$

Lösung: A ist genau dann nach unten unbeschränkt, wenn $-A$ nach oben unbeschränkt ist. In diesem Fall steht auf beiden Seiten der Gleichung „$-\infty$“. Nun sei A als nach unten beschränkt vorausgesetzt. Wir setzen $t := \inf A$ sowie $s := \sup(-A)$. Da t eine untere Schranke von A ist, ist $t \leq x$ für alle $x \in A$ und deshalb $-t \geq -x$ für alle $x \in A$. Also ist $-t$ eine obere Schranke von $-A$ und damit $-t \geq s$. Genauso sieht man, dass $-s$ eine untere Schranke von A ist. Also ist $-s \leq t$ und daraus folgt $-t = s$.

(c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

Lösung: $A + B$ ist genau dann nach oben unbeschränkt, wenn dies für A oder B gilt. In diesem Fall steht auf beiden Seiten der Gleichung „∞“. Seien nun A und B nach oben beschränkt. Wir setzen $s_A := \sup A$, $s_B := \sup B$ sowie $s := \sup(A + B)$. Da $s_A \geq x\ \forall x \in A$ und $s_B \geq y\ \forall y \in B$ ist $s_A + s_B \geq x + y\ \forall x \in A, y \in B$ und damit eine obere Schranke für $A + B$. Daraus folgt $s_A + s_B \geq s$.

Nun fixieren wir ein beliebiges $x \in A$ und sehen, dass $s - x \geq y$ für alle $y \in B$ (weil s eine obere Schranke von $A + B$ ist). Also ist $s - x$ eine obere Schranke von B und daher $s - x \geq s_B$. Da $x \in A$ beliebig gewählt war, ist also $s - s_B$ eine obere Schranke für A und deshalb erhält man $s \geq s_B + s_A$. Insgesamt folgt somit $s = s_A + s_B$.

Hinweis: Für $\sup(A + B) \geq \sup A + \sup B$ fixiere ein $x \in A$ und zeige, dass $\sup(A + B) - x \geq \sup B$.

Übungsaufgabe 12.18. Untersuche nachstehende reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit Hilfe der Konvergenzdefinition auf Konvergenz und ggf. auf uneigentliche Konvergenz.

(a) $x_n = \frac{n}{n+1}$

Lösung: Die Folge konvergiert gegen 1: Sei $m \in \mathbb{N}^*$, dann gilt für alle $n \geq N_m := m - 1$, dass

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{m}.$$

(b) $x_n = n + (-1)^n n$

Lösung: Die Folge konvergiert nicht. Um dies mit Hilfe der Definition von Konvergenz zu überprüfen, nehmen wir an, dass die Folge gegen einen Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}^*$ existiert dann ein $N_m \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| \leq 1/m$ für alle $n \geq N_m$. Andererseits gilt für alle geradzahligen $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{2}(\frac{1}{m} + |x|)$, dass

$$|x_n - x| = |2n - x| \geq 2n - |x| > \frac{1}{m}$$

im Widerspruch zur Konvergenzdefinition. Also kann x kein Grenzwert der Folge sein. Da $x \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, ist die Folge nicht konvergent.

Die Folge ist auch nicht uneigentlich konvergent. Sei dazu $M = 1$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für $n = 2N + 1 \geq N$, dass $x_n = 0$ und daher weder $x_n \geq M$ noch $x_n \leq -M$.

Übungsaufgabe 12.19. Zeige folgende Aussagen:

(a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Lösung: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert x. Dann existiert insbesondere für $m = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x| \leq 1$ für alle $n \geq N$, d.h. $|x_n| \leq 1 + |x|$ für alle $n \geq N$. Die Menge der Folgenglieder ist deshalb durch $\max\left\{ |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |x| \right\}$ beschränkt.

(b) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit Grenzwert $x \in \mathbb{C}$. Dann erfüllt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Cauchy-Kriterium aus Satz 5.27, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}^*$ existiert ein $N_m \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x_k| \leq 1/m$ für alle $n, k \geq N_m$.

Hinweis: Schreibe $|x_n - x_k| = |x_n - x + x - x_k|$ und verwende die Dreiecksungleichung.

Lösung: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert x und $m \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Dann existiert ein $N_m \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x| \leq 1/(2m)$ für alle $n \geq N_m$ und deshalb ist

$$|x_n - x_k| = |x_n - x + x - x_k| \leq |x_n - x| + |x - x_k| \leq 1/(2m) + 1/(2m) = 1/m$$

für alle $n, k \geq N_m$.

(c) Es gibt eine nicht konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ komplexer Zahlen mit folgender Eigenschaft: Für alle $m \in \mathbb{N}^*$ existiert ein $N_m \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x_{n+1}| \leq 1/m$ für alle $n \geq N_m$.

Hinweis: Betrachte die Folge $x_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$ und benutze Aufgabenteil (b) mit $k = 2n$.

Lösung: Entsprechend dem Hinweis sei $x_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$. Für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}^*$ ist $|x_n - x_{n+1}| = 1/(n+1) < 1/m$ für alle $n \geq N_m := m$. Jedoch ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, denn sie erfüllt das Cauchy-Kriterium aus Satz 5.27 nicht: Für beliebige $n \in \mathbb{N}^*$ und $k = 2n$ ist $|x_k - x_n| = \sum_{j=n+1}^{2n} 1/j \geq n \cdot 1/(2n) = 1/2$ und wird nicht beliebig klein für n und k groß genug.

Übungsaufgabe 12.20. Untersuche nachstehende Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ auf Konvergenz. Entscheide zudem bei nicht konvergenten Folgen, ob sie uneigentlich konvergieren.

(a) $x_n = \frac{2^{n+1}+7\cdot 3^n}{n\cdot 3^{n+2}}$

Lösung: Die Folge konvergiert gegen 0. Wegen

$$0 \leq \frac{2^{n+1} + 7 \cdot 3^n}{n \cdot 3^{n+2}} \leq \frac{3^{n+1} + 7 \cdot 3^{n+1}}{n \cdot 3^{n+1}} \leq \frac{8}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$$

folgt die Behauptung aus dem „Satz der Polizisten“ (Satz 5.24).

(b) $x_n = \frac{n^3+3n^2}{107n^2+50n}$

Lösung: Wegen

$$|x_n| = x_n = \frac{n^3 + 3n^2}{107n^2 + 50n} \geq \frac{n^3}{157n^2} = \frac{n}{157}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$, ist die Folge unbeschränkt und damit nach Aufgabe 12.19 (a) nicht konvergent. Die Folge konvergiert jedoch uneigentlich gegen ∞: Sei dazu $M \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Dann ist

$$x_n \geq \frac{n}{157} > M$$

für alle $n \geq N_M := 157M + 1$.

(c) $x_n = \frac{5n^4-7n^2+14}{3n^4+10n^3+12n}$

Lösung: Nach Satz 5.18 („Rechenregeln für Folgen“) gilt:

$$x_n = \frac{5 - 7/n^2 + 14/n^4}{3 + 10/n + 12/n^3} \to \frac{5 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{5}{3} \ (n \to \infty)$$

(d) $x_n = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots + (1/2)^n$

Lösung: Nach Aufgabe 13 (d) und Satz 5.18 gilt:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(1/2)^{n+1} - 1}{1/2 - 1} = 2 - (1/2)^n \to 2 \ (n \to \infty)$$

(e) $x_n = \frac{1}{n^4} + \frac{8}{n^4} + \frac{27}{n^4} + \cdots + \frac{n^3}{n^4}$

Lösung: Nach Aufgabe 13 (b) und Satz 5.18 gilt:

$$x_n = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \to \frac{1}{4}\ (n \to \infty)$$

(f) $x_1 = 1/2$ und $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$ für $n \geq 1$

Lösung: Die Folge ist konvergent, denn sie ist monoton wachsend und beschränkt.

- Wir zeigen durch Induktion nach n, dass $x_{n+1} - x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Für $n = 1$ gilt offenbar $x_2 - x_1 = 2 - 1/2 > 0$. Nun gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}^*$ und wir betrachten die Zahl $n+1$: Offenbar ist $x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ und deshalb
$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+2} + x_{n+1})}{x_{n+2} + x_{n+1}} = \frac{2(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+2} + x_{n+1}} > 0$$
nach Induktionsvoraussetzung. Also ist die Folge monoton wachsend.
- Nun zeigen wir, dass die Folge (nach oben) beschränkt ist. Wir müssen also ein $c > 0$ finden, sodass $x_n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Wählt man z.B. $c = 11$, so sieht man ebenfalls durch Induktion nach n, dass $x_n \leq c$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$: Für $n = 1$ ist $x_1 = 1/2 \leq 11$. Nun sei $x_n \leq 11$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3} \leq \sqrt{2 \cdot 11 + 3} = \sqrt{25} = 5 \leq 11$. Also ist die Folge z.B. durch $c = 11$ beschränkt.

Übungsaufgabe 12.21. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die Folge $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ konvergiert.

(a) Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. Zeige, dass $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Dieser Satz ist als *Bernoulli-Ungleichung* bekannt. Beweis durch Induktion nach n: Für $n = 0$ ist offenbar $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x$. Nun gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für den Nachfolger $n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + x + nx = 1 + (n+1)x$$

(b) Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ monoton wachsend ist.

Hinweis: Betrachte $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ und benutze Aufgabenteil (4.6).

Lösung: Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt mit der Bernoulli-Ungleichung (und weil $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$):

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right) &&= \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(1+\frac{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) &&= \left(1+\frac{-1}{(n+1)(n+1)}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\geq \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) &&= \frac{n}{n+1}\,\frac{n+1}{n} = 1
\end{aligned}$$

(c) Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergent ist.

Anleitung: Benutze zunächst Aufgabe 13 (c), schätze den Binomialkoeffizienten geeignet ab und verwende anschließend, dass $k! > 2^k$ für $k \geq 4$ sowie Aufgabe 12.20 (d).

Lösung: Es bleibt nur zu zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ beschränkt ist. Dazu benutzen wir zunächst Aufgabe 13 (c) und erhalten wegen

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}$$

für alle $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$0 \leq x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 2.$$

Nach Aufgabe 12.20 (d) ist die Folge beschränkt und damit konvergent.

Übungsaufgabe 12.22. Gegeben seien zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Dann heißt $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine streng monoton wachsende Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ von natürlichen Zahlen gibt, sodass $y_n = x_{\nu_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $\nu_{n+1} > \nu_n$ und damit auch $\nu_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, die gegen z konvergiert.

(a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit Grenzwert $x \in \mathbb{C}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, dass auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert x.

Hinweis: Schreibe $|y_n - x| = |x_{\nu_n} - x_n + x_n - x|$ und verwende die Dreiecksungleichung sowie Aufgabe 12.19 (b).

Lösung: Es sei $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ monoton wachsend derart, dass $y_n = x_{\nu_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist insbesondere $\nu_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun sei $m \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Dann existiert ein $N'_m \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x| \leq 1/(2m)$ für alle $n \geq N'_m$ und nach Aufgabe 12.19 (b) ein $N''_m \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x_k| \leq 1/(2m)$ für alle $n, k \geq N''_m$. Setze nun $N_m = \max\{N'_m, N''_m\}$, dann gilt für alle $n \geq N_m$

$$|y_n - x| = |x_{\nu_n} - x_n + x_n - x| \leq |x_{\nu_n} - x_n| + |x_n - x| \leq 1/(2m) + 1/(2m) = 1/m$$

für alle $n \geq N_m$, denn $\nu_n \geq N_m$ für alle $n \geq N_m$.

(b) Bestimme die vier Häufungspunkte der komplexen Folge $x_n = i^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir zerlegen die Folge in vier disjunkte Teilfolgen: Es ist $y'_n = x_{4n} = i^{4n} = 1^n = 1$, $y''_n = x_{4n+1} = i^{4n} \cdot i = i$, $y'''_n = x_{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = -1$ und $y''''_n = x_{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = -i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da diese vier Teilfolgen konstant sind, sind sie konvergent und wir erhalten die Häufungspunkte $1, i, -1$ und $-i$.

(c) Zeige, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Aufgabenteil (b) keine weiteren Häufungspunkte besitzt.

Lösung: Um zu sehen, dass es keine weiteren Häufungspunkte geben kann, sei $y \in \mathbb{C}$ ein (beliebiger) Häufungspunkt. Nach Definition gibt es eine Teilfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen y konvergiert. Da obige vier Teilfolgen aus Aufgabenteil (b) alle Glieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthalten, enthält mindestens eine von ihnen auch unendliche viele Glieder der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. O.B.d.A. sei dies für $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Fall. Dann enthält also $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche wegen Aufgabenteil (a) ebenfalls gegen 1 konvergiert. Eine erneute Anwendung von Aufgabenteil (a) zeigt, dass auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $1 = y$ konvergieren muss. Also ist y kein weiterer Häufungspunkt.

Übungsaufgabe 12.23. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ zwei Folgen komplexer Zahlen mit der Eigenschaft, dass $|b_n| \geq c$ für ein $c > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige oder widerlege:

(a) $a_n - b_n \to 0\ (n \to \infty) \implies a_n/b_n \to 1\ (n \to \infty)$.

Lösung: Diese Aussage ist korrekt: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - b_n| \leq c\varepsilon\ \forall n \geq N$. Dann ist

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| = \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{b_n}{b_n}\right| = \frac{|a_n - b_n|}{|b_n|} \leq \frac{c\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

(b) $a_n/b_n \to 1\ (n \to \infty) \implies a_n - b_n \to 0\ (n \to \infty)$.

Lösung: Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachte die reellen Folgen $a_n = n$ sowie $b_n = n + 1$. Dann ist $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1+1/n} \to 1\ (n \to \infty)$, jedoch $a_n - b_n = 1 \not\to 0\ (n \to \infty)$.

(c) Die Folgen $x_n := a_n + b_n$ und $y_n := a_n - b_n$ konvergieren genau dann, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Lösung: Die Aussage ist korrekt. Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, so folgt aus Satz 5.18, dass dies auch für die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Fall ist. Wenn andererseits $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, so gilt dies nach Satz 5.18 auch für $x_n/2$ sowie $y_n/2$ und damit auch für $a_n = x_n/2 + y_n/2$ und $b_n = x_n/2 - y_n/2$.

Übungsaufgabe 12.24. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C}$ zwei Folgen komplexer Zahlen, sodass $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ und die zu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ assoziierte Reihe absolut konvergiert. Zeige, dass auch die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ assoziierte Reihe absolut konvergiert.

Lösung: $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ bedeutet nach Definition, dass $|a_n b_n|$ beschränkt ist. Also existiert ein $M > 0$, sodass $|a_n| \leq M\,|b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} M\,|b_k| = M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ assoziierte Reihe absolut.

(b) In der Vorlesung wurde für alle $z \in \mathbb{C}$ die Exponentialfunktion $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ definiert. Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.

Hinweis: Benutze die Cauchy-Produktformel sowie Übungsaufgabe 13 (c).

Bemerkung: Dies ermöglicht erst die Schreibweise $\exp(z) = \mathrm{e}^z$ mit $\mathrm{e} = \exp(1)$, da exp den Potenzgesetzen genügt.

Lösung: Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig, dann gilt entsprechend dem Hinweis

$$\begin{aligned}\exp(z+w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} z^\nu w^{k-\nu} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!} z^\nu w^{k-\nu} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{k} \frac{z^\nu}{\nu!} \frac{w^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) = \exp(z)\exp(w)\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 12.25. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz, uneigentliche Konvergenz und absolute Konvergenz (wobei $z \in \mathbb{C}$ beliebig).

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{3\sqrt{k}}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k-1}{k^4+9k^3-2k}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!-5\cdot k!}{5^{k+1}}$

(e) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^k$

(f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3-k^2-3k}{k^4+6k^3+100}$

(h) $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{z^{k-n}}{(n+1)^2(k-n)!}$

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\right)^{-1}$

Lösung:

(a) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium, denn für $k \geq 2$ ist

$$\frac{k!}{k^k} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}{k\cdot k\cdot \ldots \cdot k} \leq \frac{1\cdot 2\cdot k\cdot \ldots \cdot k}{k\cdot k\cdot \ldots \cdot k} = \frac{1}{k}\frac{2}{k} = \frac{2}{k^2}$$

und laut Vorlesung ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent.

(b) Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kritierium, denn es ist

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{i^k}{3\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i^{2k}}{3\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{i^{2k-1}}{3\sqrt{2k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3\sqrt{2k}} + \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3\sqrt{2k-1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $a_k := 1/(3\sqrt{2k})$ sowie $b_k := 1/(3\sqrt{2k-1})$ sind monoton fallende nicht-negative Nullfolgen. Damit folgt die Behauptung aus dem Leibniz-Kriterium und den Rechenregeln für Reihen.

Die Reihe ist jedoch nicht absolut konvergent. Dies folgt wegen

$$\left|\frac{i^k}{3\sqrt{k}}\right| = \frac{1}{3\sqrt{k}} > \frac{1}{3k} \ \forall k \in \mathbb{N}^*$$

und weil die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ uneigentlich gegen ∞ konvergiert aus dem Majorantenkriterium.

(c) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium, denn es ist

$$\left|\frac{k^2+2k-1}{k^4+9k^3-2k}\right| \leq \frac{k^2+2k+1}{|k^4+9k^3|-|2k|} \leq \frac{4k^2}{k^4+7k^3} \leq \frac{4k^2}{k^4} = \frac{4}{k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}^*$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent nach Vorlesung (Beispiel 6.14).

(d) Die Reihe konvergiert uneigentlich gegen ∞, denn für $n \geq 5$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)! - 5 \cdot k!}{5^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{5^{k+1}} - \frac{k!}{5^k} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 5 \cdot 5} - \frac{1}{5} \geq \frac{(n+1)}{5} \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

(e) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium, denn es ist

$$\left| \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3} \right)^k \right| = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{1}{9}}^{\,k} = \left(\frac{2}{3} \right)^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und deshalb ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (23)^k$ eine absolut konvergente Majorante.

(f) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\left| \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \right| = \frac{(k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{(1+1k)(1+1k)}{(2+1k)(2+2k)} \to \frac{1}{4} \quad (n \to \infty).$$

Nach Definition von Konvergenz existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!} \frac{(2k)!}{(k!)^2} - \frac{1}{4} \right| \leq \frac{1}{4}$$

für alle $k \geq N$ und damit nach Dreiecksungleichung auch

$$\left| \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \right| \leq \frac{1}{2} < 1$$

für alle $k \geq N$.

(g) Für $k \in \mathbb{N}^*$ groß genug ist $k^2 + 3k < k^3$ und damit

$$\frac{2k^3 - k^2 - 3k}{k^4 + 6k^3 + 100} \geq \frac{k^3}{107k^4} = \frac{1}{107} \frac{1}{k}.$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ uneigentlich gegen ∞ konvergiert, gilt dies nach dem Majorantenkriterium auch für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3-k^2-3k}{k^4+6k^3+100}$.

(h) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{z^{k-n}}{(n+1)^2(k-n)!}$ Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergieren absolut für alle $z \in \mathbb{C}$. Deshalb konvergiert auch ihr Cauchyprodukt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{z^{k-n}}{(n+1)^2(k-n)!}$ absolut.

(i) Diese Reihe konvergiert nicht. Wir bezeichnen mit $H_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ die k-te Partialsumme der harmonischen Reihe. Ganz ähnlich wie in der Vorlesung sieht man, indem man immer 2^j Summanden zusammenfasst, dass $H_{2^{k+1}-1} \leq k+1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Formal kann man dies durch Induktion beweisen: Für $k = 0$ ist $H_{2-1} = 1 = 0+1$. Nun gelte die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}$ und man erhält:

$$H_{2^{k+2}-1} = \sum_{n=1}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+2}-1} \frac{1}{n} \leq (k+1) + 2^{k+1} \frac{1}{2^{k+1}} = k+2$$

weil alle 2^{k+1} Summanden der hinteren Summe $\leq 2^{-(k+1)}$ sind. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Nun sei mit $S_N = \sum_{k=1}^N (H_k)^{-1}$ die N-te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe bezeichnet. Da $(H_k)^{-1}$ monton fallend ist, sieht man wie folgt, dass S_N keine Chauchyfolge ist:

$$S_{2^{N+1}-1} - S_{2^N-1} = \sum_{k=2^N}^{2^{N+1}-1} (H_k)^{-1} \geq \sum_{k=2^N}^{2^{N+1}-1} (H_{2^{N+1}-1})^{-1} \geq 2^N(N+1)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und wird daher nicht beliebig klein für große N.

Da alle Summanden positiv sind, ist S_n monoton wachsend und deshalb uneigentlich konvergent gegen ∞.

Übungsaufgabe 12.26. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$. In der Vorlesung wurde $\sin(z) := \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}\right)$ und $\cos(z) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}\right)$ definiert. Zeige mit Hilfe dieser Definitionen folgende Identitäten:

(a) $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$

Lösung: Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z) &= \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}\frac{\mathrm{e}^{iw} + \mathrm{e}^{-iw}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{iw} - \mathrm{e}^{-iw}}{2i}\frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2} \\
= \ & \frac{1}{4i}\left(\mathrm{e}^{i(z+w)} + \mathrm{e}^{i(z-w)} - \mathrm{e}^{i(w-z)} - \mathrm{e}^{-i(z+w)} + \mathrm{e}^{i(w+z)} + \mathrm{e}^{i(w-z)} - \mathrm{e}^{i(z-w)} - \mathrm{e}^{-i(z+w)}\right) \\
= \ & \frac{2\,\mathrm{e}^{i(z+w)} - 2\,\mathrm{e}^{-i(z+w)}}{4i} = \sin(z+w)
\end{aligned}$$

(b) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

Lösung: Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) &= \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}\frac{\mathrm{e}^{iw} + \mathrm{e}^{-iw}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}\frac{\mathrm{e}^{iw} - \mathrm{e}^{-iw}}{2i} \\
= \ & \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{i(z+w)} + \mathrm{e}^{i(z-w)} + \mathrm{e}^{i(w-z)} + \mathrm{e}^{-i(w+z)} + \mathrm{e}^{i(z+w)} - \mathrm{e}^{i(z-w)} - \mathrm{e}^{i(w-z)} + \mathrm{e}^{-i(z+w)}\right) \\
= \ & \frac{2\,\mathrm{e}^{i(z+w)} + 2\,\mathrm{e}^{-i(z+w)}}{4} = \cos(z+w)
\end{aligned}$$

(c) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$

Lösung: Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\sin^2(z) + \cos^2(z) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}\right)^2 \\
= \ & \frac{\mathrm{e}^{2iz} - 2\,\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-2iz}}{-4} + \frac{\mathrm{e}^{2iz} + 2\,\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-2iz}}{4} = \frac{2+2}{4} = 1
\end{aligned}$$

(d) $3 + 4\cos(x) + \cos(2x) \geq 0$

Hinweis: Benutze die Aufgabenteile (b) und (c)

Lösung: Mit obigen Regeln erhält man

$$\begin{aligned}
& 3 + 4\cos(x) + \cos(2x) = 3 + 4\cos(x) + \cos(x+x) \\
= \ & 3 + 4\cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) = 3 + 4\cos(x) + \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) \\
= \ & 2 + 4\cos(x) + 2\cos^2(x) = 2(1 + \cos(x))^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 12.27. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass z_n genau dann gegen z konvergiert, wenn $\overline{z_n}$ gegen $\overline{z}$ konvergiert. Folgere daraus, dass $\exp(-ix) = \overline{\exp(ix)}$ sowie $|\exp(ix)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Benutze die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion sowie $1 = \exp(0)$.

Lösung: Sei $m \in \mathbb{N}^*$. Wenn z_n gegen z konvergiert, so gibt es nach Definition ein $N_m \in \mathbb{N}$, sodass $|z_n - z| \leq 1/m$ für alle $n \geq N_m$. Dann folgt unmittelbar, dass auch

$$|\overline{z_n} - \overline{z}| = |\overline{z_n - z}| = |z_n - z| \leq 1/m$$

für alle $n \geq N_m$. Genauso zeigt man auch die umgekehrte Implikation.

Alternativ kann man auch Aufgabe 12.29 benutzen, denn offenbar konvergiert genau dann $\mathrm{Im}(z_n)$ gegen $\mathrm{Im}(z)$, wenn $-\mathrm{Im}(z_n)$ gegen $-\mathrm{Im}(z)$ konvergiert.

Es sei $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\exp(-ix) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-ix)^k}{k!} = \lim_{N\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{N} \frac{(ix)^k}{k!}} = \overline{\exp(ix)}$$

und deshalb

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1$$

Übungsaufgabe 12.28. Es sei $N \in \mathbb{N}^*$ und $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^N$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass M genau dann offen ist, wenn für alle Vektoren $x \in M$ ein Radius $r > 0$ existiert, sodass $\mathrm{U}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^N : \|x - y\| < r\} \subset M$.

(a) Sei M offen (M^c abgeschlossen). Zeige, dass für jeden Vektor $x \in M$ eine reelle Zahl $r > 0$ existiert, sodass die Umgebung $\mathrm{U}_r(x)$ auch in M liegt, d.h. $\mathrm{U}_r(x) \subset M$.

Lösung: Nehmen wir an, dies ist nicht der Fall. Dann gibt es ein $x \in M$, sodass für alle $r > 0$ ein $y \in M^c$ mit $\|x - y\| < r$ existiert. Insbesondere existiert für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ein $x_n \in M^c$ mit der Eigenschaft $\|x - x_n\| < 1/n$. Somit haben wir eine Folge in M^c gefunden, die offenbar gegen $x \in M$ konvergiert. Da aber M^c abgeschlossen ist, muss nach Definition x auch in M^c liegen. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme.

(b) Nun sei M derart, dass für alle $x \in M$ eine reelle Zahl $r > 0$ existiert, sodass $\mathrm{U}_r(x)$ in M liegt, d.h. $\mathrm{U}_r(x) \subset M$. Zeige, dass M offen (also M^c abgeschlossen) ist.

Lösung: Wir nehmen an, dass M^c nicht abgeschlossen ist. Dann gibt es eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset M^c$ mit Grenzwert $x \in M$. Nach Definition gibt es also für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\|x_n - x\| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Andererseits gibt es nach Voraussetung einen Radius $r > 0$ sodass $\mathrm{U}_r(x) \subset M$. Wählt man nun $\varepsilon = r$ so folgt, dass $x_n \in M$ für alle $n \geq n_0$, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht.

Hinweis: Führe jeweils einen indirekten Beweis („Widerspruchsbeweis“) und betrachte bei (a) eine Folge von Radien der Form $1/n$.

Übungsaufgabe 12.29. Es sei $N \in \mathbb{N}^*$, $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{Nn}) \in \mathbb{R}^N$ eine Folge und $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ ein Vektor des $\mathbb{R}^N$. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ genau dann gegen y konvergiert, wenn für alle $k = 1, \ldots, N$ die Folge x_{kn} gegen y_k konvergiert.

Was lässt sich damit über Folgen komplexer Zahlen sagen?

Lösung: Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergent mit Grenzwert y und $m \in \mathbb{N}^*$. Dann existiert nach Definition ein $N_m \in \mathbb{N}$, sodass $\|x_n - y\| \leq 1/m$ für alle $n \geq N_m$. Für alle $k = 1, \ldots, N$ gilt somit auch

$$|x_{kn} - y_k| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{N} (x_{jn} - y_j)^2} = \|x_n - y\| \leq \frac{1}{m}$$

für alle $n \geq N_m$. Da $m \in \mathbb{N}^*$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Nun zeigen wir die umgekehrte Implikation. Dazu sei vorausgesetzt, dass für jedes $k = 1, \ldots, N$ die Komponentenfolge x_{kn} gegen y_k konvergiert. Für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}^*$ und $k \in \{1, \ldots, N\}$ existiert deshalb ein $N_{km} \in \mathbb{N}$, sodass $|x_{kn} - y_k| \leq \frac{1}{\sqrt{N}m}$ für alle $n \geq N_{km}$. Setzt man nun $N_m = \max\{N_{1m}, \ldots, N_{Nm}\}$, so gilt für alle $n \geq N_m$

$$\|x_n - y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} (x_{jn} - y_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{Nm^2}} = \frac{1}{m}.$$

Somit konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ gegen y.

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C}$ komplexer Zahlen konvergiert genau dann gegen ein $z \in \mathbb{C}$, wenn die Folgen der Real- und Imaginärteile $(\mathrm{Re}(z_n))_{n=1}^{\infty}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n=1}^{\infty}$ gegen $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ konvergieren (vgl. Definition der komplexen Zahlen auf Übungsblatt 2).

Übungsaufgabe 12.30. Sei es $N \in \mathbb{N}^*$ und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine Folge von Teilmengen des $\mathbb{R}^N$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist eine Menge $M_n \subset \mathbb{R}^N$ gegeben. Dann bezeichnet

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n := \left\{x \in \mathbb{R}^N : x \in M_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\right\}$$

den Durchschnitt und

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n := \left\{x \in \mathbb{R}^N : x \in M_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\right\}$$

die Vereinigung all dieser Mengen.

(a) Es sei M_n offen für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass auch $M := \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ offen ist.

Lösung: Es sei $x \in M$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $x \in M_n$. Da M_n offen ist, gibt es ein $r > 0$, sodass $\mathrm{U}_r(x) \subset M_n \subset M$. Nach Aufgabe 12.28 ist somit M offen.

(b) Es sei M_n abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass auch $M := \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ abgeschlossen ist.

Lösung: Ist $M = \emptyset$, so ist M nach Definition abgeschlossen. Ist $M \neq \emptyset$, so sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset M$ eine konvergente Folge in M mit Grenzwert x. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset M_n$ und deshalb auch, dass $x \in M_n$. Also ist $x \in M$ und somit M abgeschlossen.

(c) Es sei M_n offen für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass auch $M(k) := \bigcap_{n=0}^{k} M_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$ offen ist.

Lösung: Es sei $k \in \mathbb{N}$. Ist $M(k) = \emptyset$, so ist $M(k)$ nach Definition offen, denn $\mathbb{R}^N$ ist abgeschlossen. Ist $M(k) \neq \emptyset$, so sei $x \in M(k)$. Dann gilt $x \in M_n$ für alle $n = 0, \ldots, k$. Nach Aufgabe 12.28 gibt es für alle $n = 0, \ldots, k$ ein $r_n > 0$, sodass $\mathrm{U}_{r_n}(x)) \subset M_n$. Setzt man nun $r := \min\left\{r_0, \ldots, r_k\right\}$, so gilt $\mathrm{U}_r(x) \subset M_n$ für alle $n = 0, \ldots, k$ und somit $\mathrm{U}_r(x) \subset M(k)$. Damit ist $M(k)$ offen.

(d) Es sei M_n abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass auch $M(k) := \bigcup_{n=0}^{k} M_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$ abgeschlossen ist.

Lösung: Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset M(k)$ eine konvergente Folge in $M(k)$ mit Grenzwert x. Nun gibt es ein $n \in \left\{0, \ldots, k\right\}$ und eine Teilfolge $(x_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, die ganz in M_n liegt (andernfalls hätte die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nur endlich viele Glieder). Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergent ist, ist nach Aufgabe 22 (a) auch $(x_{\nu_n})_{n=0}^{\infty}$ konvergent mit Grenzwert x. Da M_n abgeschlossen ist, liegt x in M_n und damit $x \in M_n \subset M(k)$, also ist $M(k)$ abgeschlossen.

(e) Finde eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ offener Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, sodass $M := \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ nicht offen ist (ohne Beweis, nur $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und M angeben).

Lösung: Setze $M_n = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1 + 1/(n+1)\right\}$. Dann ist M_n die offene Kugel (ohne Oberfläche) mit Radius $\sqrt{1 + 1/(n+1)}$. Der Durchschnitt dieser Kugeln ist $M = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\right\}$, also die abgeschlossene Kugel mit Radius 1.

(f) Finde eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ abgeschlossener Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, sodass $M := \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ nicht abgeschlossen ist (ohne Beweis, nur $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und M angeben).

Lösung: Setze $M_n = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 - 1/(n+1)\right\}$. Dann ist M_n die abgeschlossene Kugel (mit Oberfläche) vom Radius $\sqrt{1 - 1/(n+1)}$. Die Vereinigung dieser Kugeln ist $M = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\right\}$, also die offene Kugel mit Radius 1.

Hinweis: Benutze Aufgabe 12.28 um zu zeigen, dass eine Menge offen ist. In Aufgabenteil (d) wähle eine Teilfolge aus, die ganz in einer der Mengen M_n liegt und benutze Aufgabe 22 (a). Betrachte für die Teilaufgaben (e) und (f) z.B. Kugeln mit Radien (oder Würfel mit Kantenlängen) der Form $1 + 1/n$ und $1 - 1/n$.

Übungsaufgabe 12.31. Es sei $N \in \mathbb{N}^*$ und $M \subset \mathbb{R}^N$ derart, dass jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset M$ eine konvergente Teilfolge $(x_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt, deren Grenzwert zu M gehört. Zeige, dass die Menge M kompakt (also abgeschlossen und beschränkt) ist.

Hinweis: Benutze Aufgabe 22 (a) um zu zeigen, dass M abgeschlossen ist und führe einen indirekten Beweis um zu zeigen, dass M beschränkt ist.

Lösung: Nach Definition ist zu zeigen, dass M abgeschlossen und beschränkt ist. Wäre M nicht beschränkt, so gäbe es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit der Eigenschaft $\|x_n\| > n$. Da jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diese Eigenschaft haben müsste (denn $\left\|x_{\varphi(n)}\right\| > \varphi(n) \geq n$), könnte keine von ihnen konvergent sein. Deshalb muss M beschränkt sein.

Um zu sehen, dass M abgeschlossen ist, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset M$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Nach Voraussetzung besitzt sie eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert y in M liegt. Nach Aufgabe 22 (a) kann es sich bei y nur um x handeln, weshalb x in M liegt, was zu zeigen war.

Übungsaufgabe 12.32. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ kompakt. Zeige, dass A ein Maximum besitzt.

Hinweis: Benutze Aufgabe 17 (a) um eine gegen $\sup A$ konvergente Folge zu konstruieren.

Lösung: Da A beschränkt ist, ist $s := \sup A \in \mathbb{R}$. Nach Aufgabe 17 (a) gibt es für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ein $x_n \in A$ mit $s - 1/n < x_n \leq s$. Nach dem Sandwich-Satz konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ gegen s. Da A abgeschlossen ist, liegt $s = \lim_{n\to\infty} x_n$ in A. Also ist $s = \max A$.

Genauso zeigt man, dass $t := \inf A$ in A liegt, weshalb $t = \min A$.

Übungsaufgabe 12.33. Betrachte die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte.

Übungsaufgabe 12.34. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ mit $f(x) = \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Hinweis: Führe eine Polynomdivision durch.

Lösung: Es ist $\frac{x^3+x^2-x-1}{x-1} = x^2 + 2x + 1$ für $x \neq 1$ und deshalb $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 + 2\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 1 = 4$.

Übungsaufgabe 12.35. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ mit $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$, $D = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Lösung: Dieser Grenzwert existiert nicht. Um das zu sehen geben wir zwei Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ in $\mathbb{R}^2$ an, für die $f(x_n)$ und $f(y_n)$ gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren.

Setze $x_n = (1/n, 1/\sqrt{n})$ sowie $y_n = (1/n, 2/\sqrt{n})$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $f(x_n) = \frac{1n1n}{1n^2+1n^2} = \frac{1}{2}$ und $f(y_n) = \frac{1n4n}{1n^2+16n^2} = \frac{4}{17}$.

Übungsaufgabe 12.36. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mit $f(x) = \frac{x^{k+1}-a^{k+1}}{x-a}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{a\}$.

Hinweis: Verwende Aufgabe 13 (d).

Lösung: Für $x \neq a$ ist nach Aufgabe 13 (d)

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} x^j a^{k-j}$$

und deshalb

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{j=0}^{k} \lim_{x\to a} x^j a^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} a^k = (k+1)a^k.$$

Übungsaufgabe 12.37. $\lim\limits_{x\to\infty}$ mit $f(x) = \frac{8x^4+3x^2-12}{2x^4+15x}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Lösung: Es ist

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{8 + 4x^2 - 12x^4}{2 + 15x^3} = 4.$$

Übungsaufgabe 12.38. Zeige mit Hilfe der Definition von Stetigkeit, dass die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ in $x_0 = 1$ stetig ist, d.h. dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Lösung: Zu zeigen ist, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 6$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setzt man $\delta = \min\{\varepsilon/12, 1\}$, dann ist

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|3x^2 + 2x - 5\right| = |(3x + 5)(x - 1)| \leq 11\,|x - 1| < 11\delta < \varepsilon$$

für alle $|x - x_0| < \delta$.

Übungsaufgabe 12.39. Untersuche folgende Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

Übungsaufgabe 12.40. $f(x) = \begin{cases} x\exp(x^4 + 3x - 4) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$.

Lösung: f ist stetig in allen Punkten $x_0 \neq 0$ als Verkettung stetiger Funktionen. Wir untersuchen nun auf Stetigkeit in $x_0 = 0$. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset D\backslash\{0\}$ eine gegen 0 konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Da die Exponentialfunktion stetig ist, ist

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n^4 + 3x_n - 4) = \exp(\lim_{n\to\infty} x_n^4 + 3x_n - 4) = \exp(-4)$$

und deshalb nach den Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \cdot \exp(-4) = 0 = f(0).$$

Übungsaufgabe 12.41. $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$, $D = (-1, 1)$.

Lösung: Für $x \in (-1, 1)\backslash\{0\}$ ist f stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Wegen

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}\,\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - (1 - x^2)}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

ist $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0)$, weshalb die Funktion f im Punkt 0 unstetig ist.

Übungsaufgabe 12.42. $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$, $D = \mathbb{R}^2$.

Lösung: Für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ist f stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Wir zeigen nun, dass f auch in $(0, 0)$ stetig ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Mit $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$ ist

$$|f(x_1, x_2) - f(0, 0)| = \left|\frac{x_1^2 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right| \leq \left|\frac{x_1^2 x_2}{\sqrt{x_1^2}}\right| = |x_1 x_2| < |x_1| = \sqrt{x_1^2} \leq \|x\| < \varepsilon$$

für alle $\|(x_1, x_2) - (0, 0)\| < \delta$.

Übungsaufgabe 12.43. $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{x_1+x_2+x_3} & \text{für } \|x\| > 1 \text{ und } x_1 + x_2 + x_3 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = (0, 0, 0) \end{cases}$
$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| > 1,\ x_1 + x_2 + x_3 \neq 0\} \cup (0, 0, 0)$

Lösung: Für $\|x\| > 1$ und $x_1 + x_2 + x_3 \neq 0$ ist f stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Wir zeigen nun, dass f auch in $(0, 0, 0)$ stetig ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $\delta = 1/2$. Dann gilt für alle $x \in D$ mit $\|x - (0, 0, 0)\| < \delta$, dass $x = (0, 0, 0)$ und deshalb $|f(x_1, x_2, x_3) - f(0, 0, 0)| = |f(0, 0, 0) - f(0, 0, 0)| = 0 < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $\|x\| < \delta$.

Allgemein gilt, dass eine jede Funktion in einem sog. *isolierten Punkt* stetig ist.

Da der Fall $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ in Aufgabenstellung nicht berücksichtigt war, sind die Punkte für diese Teilaufgaben Zusatzpunkte.

Übungsaufgabe 12.44. Es sei $N \in \mathbb{N}^*$ und $A \subset \mathbb{R}^N$. Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : A \to \mathbb{C}$, die in $y \in A$ stetig sind. Zeige, dass auch die Funktion $f \cdot g : A \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ in y stetig ist.

Lösung: Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine gegen y konvergente Folge in A. Da f und g in y stetig sind, ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$ sowie $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(y)$ und nach den Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte deshalb auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = f(y)g(y)$. Also ist $f \cdot g$ in y stetig.

Übungsaufgabe 12.45. Zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass $\cos(x)$ im Intervall $[0, 2]$ eine Nullstelle x_0 besitzt. Führe außerdem einige Schritte des im Beweis des Zwischenwertsatzes beschriebenen Verfahrens durch, um zu entscheiden, ob $x_0 \in [1.45, 1.55]$, $x_0 \in (1.55, 1.65)$ oder $x_0 \in [1.65, 1.75]$. Nimm für diese Aufgabe einen Taschenrechner zu Hilfe um $\cos(x)$ an den nötigen Stellen auszuwerten.

Lösung: Da cos eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion ist und $\cos(0) = 1 > 0$ sowie $\cos(2) \approx -0.416 < 0$, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass ein $x_0 \in [0, 2]$ existiert mit $\cos(x_0) = 0$.

Nun zum zweiten Teil der Aufgabe. Wir setzen $a_0 = 0$ sowie $b_0 = 2$ und definieren rekursiv die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Für $k \in \mathbb{N}^*$ bestimmen wir zunächst den Mittelwert $c_{k-1} = 1/2 \cdot (a_{k-1} + b_{k-1})$ und berechnen $\cos(c_{k-1})$. Ist $\cos(c_{k-1}) \geq 0$, so setzen wir $a_k := c_{k-1}$ und $b_k := b_{k-1}$. Ist dagegen $\cos(c_{k-1}) < 0$, so setzen wir $a_k := a_{k-1}$ und $b_k := c_{k-1}$. In jedem Schritt gilt somit, dass $\cos(a_k) \geq 0$ und $\cos(b_k) \leq 0$ ist und deshalb nach dem Zwischenwertsatz die die gesuchte Nullstelle x_0 im Bereich $[a_k, b_k]$ liegt. Dieses Verfahren ergibt:

k	a_k	b_k	c_k	$\cos(c_k)$	$\gtrless 0$
0	0	2	1	0.540	> 0
1	1	2	1.5	0.071	> 0
2	1.5	2	1.75	-0.178	< 0
3	1.5	1.75	1.625	-0.054	< 0
4	1.5	1.625	1.5625	0.008	> 0
5	1.5625	1.625			

Nach fünf Iterationen steht also fest, dass cos eine Nullstelle im Bereich $[1.5625, 1.625]$ hat und damit ist $x_0 \in (1.55, 1.65)$.

Übungsaufgabe 12.46. In dieser Aufgaben werden wir weitere Eigenschaften von Sinus und Cosinus kennenlernen und die Zahl π definieren.

Übungsaufgabe 12.47. Laut Skript besitzt sin für alle $z \in \mathbb{C}$ die Reihendarstellung

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Zeige, dass daraus für alle $x \in (0, 2]$ die Abschätzungen $x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x$ folgt.

Bemerkung: Genauso zeigt man, dass $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ für alle $x \in (0, 2]$ gilt.

Lösung: Es sei $x \in (0, 2]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right) + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}\right) \end{aligned}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}^*$ ist

$$\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} > 0$$

genau dann, wenn
$$\frac{x^{4k+1}(4k+3)!}{(4k+1)!x^{4k+3}} = \frac{(4k+3)(4k+2)}{x^2} > \frac{10^2}{4} > 1.$$
Deshalb ist
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}\right) > 0$$
und somit $\sin(x) > x - \frac{x^3}{6}$ für alle $x \in (0,2]$

Genauso sieht man, dass
$$\begin{aligned}\sin(x) &= x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + \left(-\frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\right) + \dots \\ &= x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}\right)\end{aligned}$$
und da
$$\frac{x^{4k+1}(4k-1)!}{(4k+1)!x^{4k-1}} = \frac{x^2}{(4k+1)4k} < \frac{4}{4^2} < 1$$
für alle $k \in \mathbb{N}^*$, ist
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}\right) < 0$$
und deshalb $\sin(x) < x$ für alle $x \in (0,2]$.

Übungsaufgabe 12.48. Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$
$$\cos(z) - \cos(w) = -2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$$
gilt, indem Du die Additionstheoreme (Aufgabe 26) auf die komplexen Zahlen $1/2(z+w) + 1/2(z-w)$ und $1/2(z+w) + 1/2(w-z)$ anwendest.

Lösung: Nach Aufgabe 26 (b) gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$
$$\begin{aligned}\cos(z) &= \cos\left(\frac{1}{2}(z+w) + \frac{1}{2}(z-w)\right) \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}(z+w)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(z-w)\right) - \sin\left(\frac{1}{2}(z+w)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(z-w)\right)\end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned}\cos(w) &= \cos\left(\frac{1}{2}(z+w) + \frac{1}{2}(w-z)\right) \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}(z+w)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(w-z)\right) - \sin\left(\frac{1}{2}(z+w)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(w-z)\right).\end{aligned}$$
Nach Definition ist $\cos(z) = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und deshalb erhält man durch Subtraktion der beiden Gleichungen
$$\cos(z) - \cos(w) = -\sin\left(\frac{1}{2}(z+w)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(z-w)\right) - \sin\left(\frac{1}{2}(z+w)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(z-w)\right)$$
und das war zu zeigen.

Übungsaufgabe 12.49. Folgere aus Aufgabenteil (12.47) und (12.48), dass cos im Intervall $[0,2]$ streng monoton fällt. Aus Aufgabe 12.45 folgt deshalb, dass cos im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle x_0 besitzt. Man definiert die *Kreiszahl* $\pi := 2 \cdot x_0 \approx 3.14159$.

Lösung: Es seien $x, y \in [0,2]$ mit $x > y$. Nach (12.48) ist

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Für $a \in (0,2]$ ist $1 - \frac{a^2}{6} > 1 - \frac{4}{6} > 0$ und deshalb auch $a - \frac{a^3}{6} > 0$. Aus Aufgabenteil (12.47) folgt daher, dass $\sin(a) > 0$ für alle $a \in (0,2]$. Da $\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \in (0,2]$, ist somit

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) < 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Übungsaufgabe 12.50. Berechne (ohne Taschenrechner) die folgende Wertetabelle. Zeige dazu, dass $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und benutze Aufgabe 26.

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos(x)$		0			
$\sin(x)$					
$\exp(ix)$	1				

Lösung: Nach Aufgabe 26 (c) ist

$$1 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

und da nach Aufgabenteil (12.49) sin im Bereich $(0,2]$ strikt positiv ist, folgt $\sin(\pi/2) = 1$. Aus den Definitionen sieht man sofort, dass $\cos(0) = 2/2 = 1$ und $\sin(0) = (1-1)/2 = 0$ und aus Aufgabe 26 (a) und (b) folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\cos(\pi) &= \cos^2(\pi/2) - \sin^2(\pi/2) = -1\\
\sin(\pi) &= 2\cos(\pi/2)\sin(\pi/2) = 0\\
\cos(x+\pi) &= \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x)\\
\sin(x+\pi) &= \cos(x)\sin(\pi) + \cos(\pi)\sin(x) = -\sin(x)\\
\cos(3/2\cdot\pi) &= \cos(\pi/2+\pi) = -\cos(\pi/2) = 0\\
\sin(3/2\cdot\pi) &= \sin(\pi/2+\pi) = -\sin(\pi/2) = -1\\
\cos(2\pi) &= \cos(\pi+\pi) = -\cos(\pi) = 1\\
\sin(2\pi) &= \sin(\pi+\pi) = -\sin(\pi) = 0
\end{aligned}$$

Nach Definition ist

$$\cos(x) + i\sin(x) = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2} + \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2} = \frac{2\exp(ix)}{2} = \exp(ix).$$

Damit erhält man insgesamt:

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\exp(ix)$	1	i	-1	$-i$	1

Bemerkung: Die Punkte für diese Aufgabe sind Zusatzpunkte.

ÜBUNGSAUFGABE 12.51. Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. dass es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

Hinweis: Betrachte dazu die Funktion $x \mapsto f(x) - x$ und zeige, dass sie eine Nullstelle in $[a, b]$ besitzt.

Lösung: Wie im Hinweis betrachten wir die Funktion $g(x) = f(x) - x$. Dann ist auch g auf $[a, b]$ stetig und offenbar $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0 = a - a \leq f(a) - a = g(a)$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert deshalb ein $x_0 \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $g(x_0) = 0$. Das bedeutet aber gerade, dass $f(x_0) = x_0$, also dass x_0 ein Fixpunkt von f ist.

Übungsaufgabe 12.52. Entscheide, ob folgende Gleichungen eine Lösung in $D \subset \mathbb{R}$ besitzen.

Übungsaufgabe 12.53. $\exp(x) = x^3 + 2, \quad x \in D = [-10, 10]$

Lösung: Betrachte die Funktion $f(x) = \exp(x) - x^3 - 2$. Dann ist f auf ganz $\mathbb{R}$ und insbesondere auf D stetig. Wegen

$$\exp(10) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{10^k}{k!} \geq \frac{10^6}{6!} = \frac{100000}{6 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{100000}{73} > \frac{10000}{8} > 1000 + \frac{1600}{8} = 1200$$

ist $f(10) \geq 1200 - 1000 - 2 > 0$ sowie $f(0) = 1 - 0 - 2 < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt f im Intervall $[0, 10]$ eine Nullstelle und diese löst die Gleichung.

Übungsaufgabe 12.54. $\sqrt{x} - \sqrt{x+y} = -\sqrt{y}, \quad x, y \in D = (0, \infty)$

Lösung: Diese Gleichung besitzt keine Lösung. Wegen $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x + 2\sqrt{xy} + y > x + y$ ist auch $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x+y}$ für alle $x, y \in D$.

Übungsaufgabe 12.55. $x^5 + 10x^2 - 43x = 17x^3 - 10x^4 - 1, \quad x \in D = (0, 2)$

Lösung: Betrachte die Funktion $f(x) = x^5 + 10x^4 - 17x^3 + 10x^2 - 43x + 1$, dann ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Wegen $f(1) = -38 < 0 < 1 = f(0)$ besitzt f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$. Da $f(0) \neq 0$ liegt diese Nullstelle in $(0, 2)$ und löst die Gleichung.

Bemerkung: Versuche die Aufgabe ohne Taschenrechner zu lösen, da auch in der Klausur kein Taschenrechner zugelassen ist.

Übungsaufgabe 12.56. Entscheide, ob folgende Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ lokale Maxima und/oder Minima besitzen (mit Beweis).

Übungsaufgabe 12.57. $D = \mathbb{R}^N, \quad f(x) = \exp(-\|x\|^2)$

Lösung: f besitzt in $x_0 = 0$ ein globales (und damit auch lokales) Maximum: Für alle $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ ist $\|x\|^2 > \|0\|^2 = 0$ und deshalb wegen der strengen Monotonie von exp auf $\mathbb{R}$ auch $\exp(-\|x\|^2) < \exp(-\|x_0\|^2) = \exp(0) = 1$.

f besitzt jedoch kein lokales Minimum in D: Angenommen $x_0 \in \mathbb{R}^N$ wäre eine lokale Minimumstelle. Dann gäbe es nach Definition ein $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in \mathrm{U}_\varepsilon(x_0)$. Nun wäre aber z.B. für $x = (1 + \frac{\varepsilon}{2\|x_0\|})x_0 \in \mathrm{U}_\varepsilon(x_0)$, wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$, $\exp(-\|x\|^2) < \exp(-\|x_0\|^2)$, was nicht sein kann.

Übungsaufgabe 12.58. $D = [0, 5], \quad f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \pi \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

Lösung: Laut Vorlesung ist f auf D stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen. Da D kompakt ist, nimmt f auf D ein globales (also auch ein lokales) Maximum und Minimum an.

Übungsaufgabe 12.59. $D = (-2, 2), \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } -2 < x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x < 2 \end{cases}$

Lösung: Die Funktion f besitzt z.B. in $x_0 = 1$ ein lokales Maximum und ein lokales Minimum, denn für $\varepsilon = 1/2$ ist $f(x) = f(x_0)$ für alle $x \in \mathrm{U}_\varepsilon(x_0)$ und damit sowohl $f(x) \leq f(x_0)$ als auch $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in \mathrm{U}_\varepsilon(x_0)$.

Übungsaufgabe 12.60. Zeige, dass die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sin(x + \pi/2) + \cos(2/3 \cdot x)$ eine stetige Umkehrfunktion besitzt, deren Definitionsbereich das Intervall $[1, 2]$ enthält.

Lösung: Offenbar ist die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich stetig. Da $[0, 2]$ kompakt ist, existieren Maximum $b := \max f$ und Minimum $a := \min f$. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt f jeden Wert im Intervall $[a, b]$ an, bildet also surjektiv in das Intervall $[a, b]$ ab.

Nach Aufgabe 12.46 (12.49) ist cos auf $[0, 2]$ streng monoton und nach Aufgabe 12.46 (12.50) ist $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)\sin(\pi/2) + \cos(\pi/2)\sin(x) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da für $x \in [0, 2]$ auch $2/3 \cdot x \in [0, 2]$ ist, sind somit $\sin(x + \pi/2)$ und $\cos(2/3 \cdot x)$ auf $[0, 2]$ streng monoton.

Nun zeigen wir, dass die Summe zweier im gleichen Sinn streng monotoner Funktionen $g, h : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ stets streng monoton ist. Es seien dazu $x, y \in D$ mit $x < y$ und g, h o.B.d.A. streng monoton wachsend. Dann ist

$$(g(y) + h(y)) - (g(x) + h(x)) = g(y) - g(x) + h(y) - h(x) > 0 + 0 = 0.$$

Also ist auch f auf $[0, 2]$ streng monoton und damit injektiv. Laut Vorlesung existiert also eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : [a, b] \to [0, 2]$.

Nun ist nur noch zu zeigen, dass $[1, 2] \subset [a.b]$. Offenbar ist $f(0) = 2$ und $f(\pi/2) = 0 + \cos(\pi/3) \leq 1$. Nach dem Zwischenwertsatz gilt somit $[1, 2] \subset f([0, 2]) = [a, b]$.

Übungsaufgabe 12.61. Untersuche die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Definition 9.1 auf Differenzierbarkeit im Punkt x_0 und bestimme ggf. $f'(x_0)$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

(b) $f(x) = 4x^2 + 2, \quad x_0 = 2$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}, \quad x_0 \neq 0$

Lösung:

(a) Die Funktion f ist in x_0 nicht differenzierbar. Dazu betrachten wir die beiden Nullfolgen $a_n = 1/n$ und $b_n = -1/n$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $x_0 + a_n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 + 1/n)^2 - 1}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n + 1/n^2}{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2.$$

Andererseits ist $x_0 + b_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und deshalb

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + b_n) - f(x_0)}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 - 1/n) - 1}{-1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert also nicht und somit ist f in x_0 nicht differenzierbar.

(b) Die Funktion f ist differenzierbar in $x_0 = 2$ mit $f'(x_0) = 16$, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(2 + h)^2 + 2 - 18}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{16h + 4h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 16 + 4h = 16.$$

(c) Die Funktion f ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Dazu betrachten wir die Nullfolge $a_n = 1/n$ für $n \in \mathbb{N}^*$ (mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$) und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1/n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Tatsächlich ist die Steigung der Funktion f im Punkt $x_0 = 0$ „unendlich groß“, sodass wir keine Ableitung bestimmen können.

(d) Nun sei $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann ist die Funktion f im Punkt x_0 differenzierbar mit

$$f'(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x_0}} & \text{für } x_0 > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x_0}} & \text{für } x_0 < 0 \end{cases}.$$

Sei zunächst $x_0 > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

Genauso erhält man für $x_0 < 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt{-x_0-h}+\sqrt{-x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{-x_0}+\sqrt{-x_0-h}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{-x_0}}$$

Übungsaufgabe 12.62. Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen.

Übungsaufgabe 12.63. $f(x) = x^{(x^x)}$ $[= \exp_x(\exp_x(x))]$

Übungsaufgabe 12.64. $f(x) = \sin^2\left(x^3+\cos(x^2)\right)$

Übungsaufgabe 12.65. $f(x) = \frac{\sqrt{x}\sin(x)}{\log(x)}$

Übungsaufgabe 12.66. $f(x) = \arctan\left(x^2\right)$

Lösung:

(a) Mit Ketten- und Produktregel erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{(x^x)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(\exp(x\log(x))\log(x)\right) \\ &= \exp\left(\exp(x\log(x))\log(x)\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x\log(x))\log(x) \\ &= x^{(x^x)} \left(\exp(x\log(x)) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\log(x)\right) \log(x) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(x)\right) \cdot \exp(x\log(x))\right) \\ &= x^{(x^x)} \left(x^x\left(\log(x)+1\right)\log(x) + \frac{1}{x}x^x\right) \\ &= x^{(x^x)} \left(x^x\left(\left(\log(x)+1\right)\log(x) + \frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

(b) Mit Produkt- und Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin^2\left(x^3+\cos(x^2)\right) &= 2\sin\left(x^3+\cos(x^2)\right) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin\left(x^3+\cos(x^2)\right)\right) \\ &= 2\sin\left(x^3+\cos(x^2)\right)\cos\left(x^3+\cos(x^2)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3+\cos(x^2)\right) \\ &= 2\sin\left(x^3+\cos(x^2)\right)\cos\left(x^3+\cos(x^2)\right)\left(3x^2-\sin(x^2)2x\right) \end{aligned}$$

(c) Mit Produkt- und Quotientenregel erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\sqrt{x}\sin(x)}{\log(x)} &= \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}\sin(x)\right)\log(x) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(x)\right)\sqrt{x}\sin(x)}{\log^2(x)} \\ &= \frac{1}{\log^2(x)}\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(x)+\cos(x)\sqrt{x}\right)\log(x) - \frac{1}{x}\sqrt{x}\sin(x)\right) \\ &= \frac{\left(12\sin(x)+x\cos(x)\right)\log(x)-\sin(x)}{\log^2(x)\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(d) Wir benutzen zunächst den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion aus der Vorlesung um die Ableitung von arctan zu bestimmen. Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

erhalten wir somit für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Mit der Kettenregel folgt nun

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x^2) = \frac{2x}{1+x^4}$$

Übungsaufgabe 12.67. In dieser Aufgabe wollen wir den wichtigen *Mittelwertsatz* der Differenzialrechnung beweisen. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, welche in (a, b) differenzierbar sind. Zeige mit dem Satz von Rolle, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert, sodass

$$f'(x_0)(g(b)-g(a)) = (f(b)-f(a))\, g'(x_0),$$

indem Du die Hilfsfunktion $x \mapsto f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$ betrachtest. Folgere daraus den einfacheren Mittelwertsatz: Zeige, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert, sodass

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Lösung: Wir definieren die Funktion $h(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$. Dann ist h auf $[a, b]$ stetig, in (a, b) differenzierbar und es gilt $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b)$. Aus dem Satz von Rolle folgt somit, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert, sodass

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0)(g(b)-g(a)) - g'(x_0)(f(b)-f(a)),$$

was zu zeigen war.

Wählt man nun $g(x) = x$, so ist g auf $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar mit $g'(x) = 1$ für alle $x \in (a, b)$. Wie soeben gesehen, existiert deshalb ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0)(b-a) = f(b) - f(a)$$

und das war zu zeigen.

Übungsaufgabe 12.68. Es sei $N \in \mathbb{N}^*$ und $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine *lineare Funktion*, das heißt für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$ und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

In dieser Aufgaben wollen wir zeigen, dass f genau dann stetig ist, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass $|f(x)| \leq c$ für alle $\|x\| \leq 1$, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $|f(x)| \leq c\,\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$. Beweise folgende Aussagen:

Übungsaufgabe 12.69. Wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass $|f(x)| \leq c$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$ mit $\|x\| \leq 1$, so gilt auch $|f(x)| \leq c\,\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Hinweis: Trenne die Fälle $x = 0$ und $x \neq 0$ und schreibe $x = \|x\| \cdot x/\|x\|$.

Lösung: Wegen $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ ist $f(0) = 0$. Deshalb ist für $x = 0$ die Ungleichung trivial. Nun sei $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, dann ist

$$|f(x)| = \left| f\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) \right| = \|x\| \left| f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right| \leq c\,\|x\|.$$

Übungsaufgabe 12.70. Wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass $|f(x)| \leq c\,\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$, so ist f stetig.

Lösung: Wir zeigen Stetigkeit in $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Mit $\delta = \varepsilon/(2c)$ erhält man für alle $\|x - x_0\| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| \leq c\,\|x - x_0\| < c\delta < \varepsilon.$$

Übungsaufgabe 12.71. Wenn f stetig ist gibt es eine Konstante $c > 0$, sodass $|f(x)| \leq c$ für alle $\|x\| \leq 1$.

Lösung: Der Beweis kann auf zwei Arten erbracht werden.

- Direkter Beweis: In Teil (12.69) haben wir gesehen, dass $f(0) = 0$. Da f in 0 stetig ist, gibt es für $\varepsilon = 1$ eine $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(0)| = |f(x)| < 1$ für alle $\|x\| \leq \delta$. Damit gilt für alle $\|x\| \leq 1$, dass
$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{\delta x}{\delta}\right)\right| = \left|\frac{1}{\delta} f(\delta x)\right| \leq \frac{1}{\delta},$$
denn $\|\delta x\| = \delta\,\|x\| \leq \delta$.
- Alternativer Beweis: Da f auf $\mathbb{R}^N$ stetig und $D := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq 1\}$ kompakt ist, nimmt f auf D ein Maximum $m := \max_{x\in D} f(x)$ sowie ein Minimum $n := \min_{x\in D} f(x)$ an und damit ist $|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\} \leq \max\{m, -n\} =: c$ für alle $x \in D$.

Übungsaufgabe 12.72. Bestimme und klassifiziere die lokalen Extremstellen folgender Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ in $A \subset D$ und bestimme, falls existent, das globale Minimum und Maximum von f.

Übungsaufgabe 12.73. $D = [-4, 4],\ A = (-4, 4),\quad f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 48x^2 + 2$

Lösung: Wir untersuchen f zunächst auf lokale Extremstellen in A. Da f zweimal differenzierbar ist, betrachten wir

$$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 96x \ \text{ und } \ f''(x) = 36x^2 + 48x - 96.$$

Die notwendige Bedingung $0 = f'(x) = 12x(x^2 + 2x - 8) = 12x(x - 2)(x + 4)$ ist in A offenbar für $x = 0$ und $x = 2$ erfüllt. Wegen $f''(0) = -96 < 0$, $f''(2) = 144 > 0$ ist 0 lokale Maximumstelle und 2 lokale Minimumstelle.

Da die Funktion f stetig und D kompakt ist, nimmt sie auf D auch ein globales Maximum und Minimum an. Wegen $f(-4) = -510, f(0) = 2, f(2) = -78, f(4) = 514$ ist -4 globale Minimumstelle und 4 globale Maximumstelle.

Übungsaufgabe 12.74. $D = A = (0, 3/2 \cdot \pi),\quad f(x) = \exp(x)\cos(x)$

Hinweis: Verwende die folgende Wertetabelle:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Lösung: Wir untersuchen f zunächst auf lokale Extremstellen in A. Da f zweimal differenzierbar ist, betrachten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(x)(\cos(x) - \sin(x)) \\ f''(x) &= \exp(x)(\cos(x) - \sin(x) - \sin(x) - \cos(x)) = -2\exp(x)\sin(x) \end{aligned}$$

Weil $\exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wird die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ genau für $x = \pi/4$ und $x = 5/4 \cdot \pi$ in A erfüllt, denn $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ und $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nun ist $f''(\pi/4) = -\exp(\pi/4)\sqrt{2} < 0$ und $f''(5/4 \cdot \pi) = \exp(5/4 \cdot \pi)\sqrt{2} > 0$ und deshalb $\pi/4$ lokale Maximumstelle sowie $5/4 \cdot \pi$ lokale Minimumstelle.

Da $D = A$ offen ist, muss jede globale Extremstelle $x \in D$ auch die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ erfüllen. Unklar ist noch, ob es globale Extremstellen gibt. Wegen $\lim_{x\to 0} f(x) = \exp(0)\cos(0) = 1 < \frac{\exp(\pi/4)}{\sqrt{2}} = f(\pi/4)$ und $\lim_{x\to 3/2\cdot\pi} f(x) = \exp(3/2 \cdot \pi)\cos(3/2 \cdot \pi) = 0 > -\frac{\exp(5/4\cdot\pi)}{\sqrt{2}} = f(5/4 \cdot \pi)$ ist die Funktion am Rand beschränkt und stets kleiner als das lokale Maximum bzw. größer als das lokale Minimum. Deshalb ist $\pi/4$ auch das globale Maximum und $5/4 \cdot \pi$ das globale Minimum von f in D.

Übungsaufgabe 12.75. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass f genau dann monoton fällt, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in D$.

Lösung: Es sind zwei Richtungen zu zeigen! Zunächst sei vorausgesetzt, dass $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in D$. Für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in (x, y)$, sodass $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x)$. Nach Voraussetzung ist $f'(x_0) \leq 0$ und deshalb $f(y) - f(x) \leq 0$, also $f(y) \leq f(x)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

Nun sei f als monoton fallend vorausgesetzt und $x \in D$. Für alle $h > 0$ mit $x + h \in D$ ist deshalb $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$. Aber ebenso gilt für alle $h < 0$ mit $x + h \in D$, dass $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$ und somit ist auch $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$.

Übungsaufgabe 12.76. Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(1+\exp(2x^2))}{x^2}$

Lösung:

(a) Da cos stetig ist, existiert der Grenzwert $\lim_{x\to\pi} \cos(x) = \cos(\pi) = -1$ und wir erhalten mit dem Satz von l'Hôpital
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(\pi) = -1.$$

(b) Da der Grenzwert $\lim_{x\to 0} -x = 0$ existiert, erhalten wir mit dem Satz von l'Hôpital, dass
$$\lim_{x\to 0} x\log(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$
Da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt somit
$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp(x\log(x)) = \exp\left(\lim_{x\to 0} x\log(x)\right) = \exp(0) = 1.$$
Die Funktion $x \mapsto x^x$ kann also durch 1 stetig im Nullpunkt fortgesetzt werden.

(c) Wir bestimmen zunächst die Ableitung von $\arcsin(x)$. Wegen $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ für $x \in [-\pi/2, \pi, 2]$ erhalten wir mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion
$$\arcsin'(x) = \big(\sin'(\arcsin(x))\big)^{-1} = \left(\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}\right)^{-1} = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}$$
für alle $x \in [-1, 1]$, denn $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$. Da der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2} = 1$ existiert, folgt aus dem Satz von l'Hôpital, dass
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\arcsin'(x)} = \lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2} = 1.$$

(d) Da Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(2x^2)}{1+\exp(2x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(-2x^2)+1} = 1$ existiert, folgt aus dem Satz von l'Hôpital, dass
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+\exp(2x^2))}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\exp(2x^2)}\exp(2x^2)4x}{2x} = \lim_{x\to\infty} 2\frac{\exp(2x^2)}{1+\exp(2x^2)} = 2.$$

Übungsaufgabe 12.77. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $n \in \mathbb{N}^*$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen. Zeige mit vollständiger Induktion, dass auch ihr Produkt $f \cdot g$ n-mal differenzierbar ist mit
$$\frac{\mathrm{d}^n fg}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k} g}{\mathrm{d}x^{n-k}}.$$

Lösung: Für $n=1$ erhält man mit der Kettenregel, dass $f \cdot g$ differenzierbar ist mit

$$\frac{\mathrm{d}fg}{dx} = \frac{\mathrm{d}f}{dx}g + \frac{\mathrm{d}g}{dx}f.$$

Nun seien f und g $n+1$-mal differenzierbar und es gelte, dass $f \cdot g$ n-mal differenzierbar ist mit

$$\frac{\mathrm{d}^n fg}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k} g}{\mathrm{d}x^{n-k}}$$

für ein (festes) $n \in \mathbb{N}^*$. Da sowohl $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$ als auch $\frac{\mathrm{d}^{n-k} g}{\mathrm{d}x^{n-k}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ differenzierbare Funktionen sind (denn f und g sind nach Voraussetzung $n+1$-mal differenzierbar), folgt aus der Kettenregel, dass auch

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k} g}{\mathrm{d}x^{n-k}} = \frac{\mathrm{d}^n fg}{\mathrm{d}x^n}$$

eine differenzierbare Funktion ist und man erhält wiederum mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{n+1} fg}{\mathrm{d}x^{n+1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^n fg}{\mathrm{d}x^n} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k} g}{\mathrm{d}x^{n-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{\mathrm{d}^{k+1} f}{\mathrm{d}x^{k+1}} \frac{\mathrm{d}^{n-k} g}{\mathrm{d}x^{n-k}} + \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k+1} g}{\mathrm{d}x^{n-k+1}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k+1} g}{\mathrm{d}x^{n-k+1}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k+1} g}{\mathrm{d}x^{n-k+1}} \\
&= \frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}} g + f \frac{\mathrm{d}^{n+1} g}{\mathrm{d}x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k+1} g}{\mathrm{d}x^{n-k+1}} \\
&= \frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}} g + f \frac{\mathrm{d}^{n+1} g}{\mathrm{d}x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k+1} g}{\mathrm{d}x^{n-k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k+1} g}{\mathrm{d}x^{n-k+1}}.
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 12.78. Berechne (mit Taschenrechner) eine Approximation an $\sqrt{2}$, indem du vier Schritte des Newtonverfahrens mit der Funktion $x \mapsto 1 - 2/x^2$ und dem Startwert $x_0 = 2$ durchführst.

Lösung: Wir betrachten die zweimal differenzierbare Funktion $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - 2/x^2$ und erhalten $f'(x) = 4/x^3 \neq 0$ für alle $x \in (1, \infty)$. Wählt man $x_0 = 2$, so erhält man durch die Rekursionsgleichung $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ nachstehende Folge von Approximationswerten an $\sqrt{2}$:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	2	0.5	0.5
1	1	-1	4
2	1.25	-0.28	2.048
3	1.387	-0.04	1.499
4	1.414		

Übungsaufgabe 12.79. Es sei $a < b$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass

$$\int_a^b f'(x) f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(f(b)^2 - f(a)^2)$$

Lösung: Mit partieller Integration sieht man, dass

$$\int_a^b f'(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)f(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)f'(x) = f(b)^2 - f(a)^2 - \int_a^b f'(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

und daraus folgt die Behauptung, indem man auf beiden Seiten der Gleichung $\int_a^b f'(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ addiert.

ÜBUNGSAUFGABE 12.80. Berechne den Wert folgender Integrale

(a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-1}}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)\exp(\sin(x))\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x^2)\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^2 x^3\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x^2+16x+8}{x(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

(a) Mit den Funktionen $f(x) = 4x-1$ und $j(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ kann man die Substitutionsregel wie folgt anwenden:

$$\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-1}} = \frac{1}{4}\int_2^4 f'(x)j(f(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big[2\sqrt{x}\Big]_{f(2)}^{f(4)} = \frac{1}{2}(\sqrt{15}-\sqrt{7})$$

Oder kurz: Mit der Substitution $u = 4x-1$ erhält man $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{4}$ und somit

$$\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-1}} = \frac{1}{4}\int_7^{15} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\Big[\sqrt{u}\Big]_7^{15} = \frac{1}{2}(\sqrt{15}-\sqrt{7})$$

(b) Mit der Substitution $u = \sin(x)$ erhält man $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cos(x)}$ und somit

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\exp(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \exp(u) = \mathrm{e}-1$$

(c) Mit der Substitution $u = \cos(x)$ erhält man $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{-\sin(x)}$ und somit

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[\arctan(u)\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

(d) Durch partielles Integrieren erhält man

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\arctan(x^2) &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^4)}\cdot 2x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\Big[\log(1+x^4)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{\log(2)}{4}
\end{aligned}$$

(e) Zunächst substituiert man $u = x^2$ und integriert anschließend partiell.

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^3 \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^4 u\exp(-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \Big[-\frac{1}{2}u\exp(-u)\Big]_0^4 + \frac{1}{2}\int_0^4 \exp(-u)\,\mathrm{d}u \\ &= -2\exp(-4) + \frac{1}{2}\Big[-\exp(-u)\Big]_0^4 \\ &= -2\exp(-4) - \frac{1}{2}\exp(-4) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\exp(-4)\end{aligned}$$

(f) Bis auf einen Faktor 2 steht im Zähler die Ableitung des Nenners und deshalb ist

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{6x^2+16x+8}{x(x+2)^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_1^2 \frac{3x^2+8x+4}{x^3+4x^2+4x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\Big[\log(x^3+4x^2+4x)\Big]_1^2 \\ &= 2(\log(32)-\log(9)) \\ &= 10\log(2) - 4\log(3)\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 12.81. Bestimme zu folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion

(a) $\exp(x)\cos(x)$

(b) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$

(c) $\log^2(x)$

(d) $\exp(-\sqrt{x})$

Hinweis: Zur Lösung der Aufgaben 52 – 54 verwende partielle Integration und/oder Substitution.

Lösung:

(a) Mit zweimaliger partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^x \exp(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \exp(x)\cos(x) - 1 + \int_0^x \exp(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \exp(x)\cos(x) - 1 + \exp(x)\sin(x) - 0 - \int_0^x \exp(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Bringt man nun $\int_0^x \exp(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ auf die linke Seite, sieht man, dass

$$\frac{1}{2}\left(\exp(x)(\cos(x)+\sin(x))\right)$$

eine Stammfunktion ist.

(b) Mit der Substitution $u = \exp(x)$ erhält

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u) = \arcsin(\mathrm{e}^x)$$

(c) Durch zweimaliges partielles Integrieren erhält man

$$\begin{aligned}\int \log^2(x)\,\mathrm{d}x &= x\log^2(x) - \int x 2\log(x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x\log^2(x) - 2x\log(x) + 2\int \mathrm{d}x \\ &= x\left(\log^2(x) - 2\log(x) + 2\right)\end{aligned}$$

(d) Zunächst substituiert man $u = \sqrt{x}$ und integriert anschließend partiell

$$\begin{aligned}
\int \exp(-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x &= \int 2u\exp(-u)\,\mathrm{d}u \\
&= -2u\exp(-u) + 2\int \exp(-u) \\
&= -2u\exp(-u) - 2\exp(-u) \\
&= -2\exp(-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 12.82. Bestimme das zweite Taylorpolynom $T_2 f(x; x_0)$ folgender Funktion f im Punkt $x_0 = 1$

$$f(x) = \int_0^{x\,\mathrm{e}^x} \cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Lösung: Mit der Kettenregel und dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung erhält man

$$f'(x) = \cos(x\,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^x(1+x)$$

und somit

$$f''(x) = -\sin(x\,\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x(1+x))^2 + \cos(x\,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^x(1+x+1).$$

Mit den Zahlen $f(1) = \sin(\mathrm{e})$, $f'(1) = 2\cos(\mathrm{e})\,\mathrm{e}$ und $f''(1) = -4\,\mathrm{e}^2\sin(\mathrm{e}) + 3\,\mathrm{e}\cos(e)$ ergibt sich das folgende Taylorpolynom:

$$T_2 f(x;1) = \frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

Übungsaufgabe 12.83. Es sei $N \in \mathbb{N}^*$. Für eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ bezeichnet man mit $\prod_{k=1}^{N} x_k = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_N$ das Produkt der ersten N Folgenglieder.

Zeige, dass $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Lösung: Wir zeigen die Behauptung mit Induktion nach n. Für $n = 2$ ist offenbar $(1+1)^1 = 2 = 2^2/2$. Gilt die Behauptung

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, so folgt für $n+1$, dass

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n^n}{n!} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-k} n^n \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} n^k \\
&= \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

ÜBUNGSAUFGABE 12.84. Untersuche nachstehende Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ auf Konvergenz und bestimme ggf. ihren Grenzwert.

(a) $x_n = \dfrac{n^2+(-3)^n}{3^{n+1}+2^n}$

(b) $x_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^j \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^k$

(c) $x_n = i^n + 1/n$

(d) $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$

(e) $x_n = \dfrac{17n^4+12n^2+2002}{n(n^3+15)}$

Hinweis: Verwende Aufgabe 22 (a).

Lösung:

(a) Diese Folge konvergiert nicht. Um das einzusehen betrachten wir die Teilfolgen $y_n = x_{2n}$ und $z_n = x_{2n+1}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^2+9^n}{3\cdot 9^n+4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^2 9^n+1}{3+(49)^n} = \frac{1}{3}$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2-3\cdot 9^n}{9\cdot 9^n+2\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2 9^n-3}{9+2\cdot(49)^n} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Würde die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ gegen ein $x\in\mathbb{R}$ konvergieren, so würden auch alle Teilfolgen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ gegen x konvergieren. Wir haben aber bereits zwei Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten gefunden, deshalb konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nicht.

(b) Durch Vertauschung der Summationsreihenfolge und Anwenden der geometrischen Summenformel erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} 2^j \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{6}\right)^k \sum_{j=k}^{n} \binom{k}{j} 2^j \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{6}\right)^k 3^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(12)^{n+1}-1}{12-1} = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

und somit $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

(c) Die Folge konvergiert nicht. Um das einzusehen betrachten wir z.B. die Teilfolgen $y_n = x_{4n}$ sowie $z_n = x_{4_n+2}$ für $n\in\mathbb{N}^*$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{4n} = 1$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n+2} = \lim_{n\to\infty} -1+\frac{1}{4n+2} = -1.$$

Würde die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ gegen ein $x\in\mathbb{C}$ konvergieren, so würden auch alle Teilfolgen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ gegen x konvergieren. Wir haben aber bereits zwei Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten gefunden, deshalb konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nicht.

(d) Es ist

$$x_n = \sqrt{n^2+n}-n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+1n}+1}$$

und somit $\lim_{n\to\infty} x_n = 12$.

(e) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{17n^4+12n^2+2002}{n(n^3+15)} = \lim_{n\to\infty} \frac{17+12n^2+2002n^4}{1+15n^3} = 17$$

Übungsaufgabe 12.85. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-7)}{5n(n^2+n)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{3}-1\right)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Lösung:

(a) Für $n > 14$ ist

$$\frac{n(n-7)}{5n(n^2+n)} = \frac{n^2-7n}{5n^3+5n^2} = \frac{1-7n}{5n+5} > \frac{12}{10n} = \frac{1}{20n}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{20n}$ nicht konvergiert, konvergiert auch die gegebene Reihe nicht und insbesondere auch nicht absolut.

(b) Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geq 0$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Jedoch konvergiert die Reihe nicht absolut, denn für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist

$$\left|\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{1+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n}$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ konvergiert nicht.

(c) Da $1 < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ ist $0 < \sqrt{3}-1 < 1$ und deshalb konvergiert diese geometrische Reihe absolut gegen $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

(d) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium, denn es ist

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot\dots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n} \leq \frac{2\cdot 2\cdot\dots\cdot 2}{2\cdot\dots\cdot 2\cdot(n-1)\cdot n} = \frac{8}{(n-1)n} \leq \frac{8}{n^2-\frac{1}{2}n^2} = \frac{16}{n^2}$$

für $n > 2$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^2}$ konvergiert nach Vorlesung.

Übungsaufgabe 12.86. Berechne folgende Integrale (für $n \in \mathbb{N}$)

(a) $\displaystyle\int_1^{\exp(10)} \frac{\log(x)^n}{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{\log(3x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Mit den Funktionen $f(x) = \log(x)$ und $j(x) = x^n$ kann man die Substitutionsregel wie folgt anwenden:

$$\int_1^{\exp(10)} \frac{\log(x)^n}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\exp(10)} f'(x)j(f(x))\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{f(1)}^{f(\exp(10))} = \frac{10^{n+1}}{n+1}$$

Oder kürzer: Mit der Substitution $u = \log(x)$ erhält man

$$\int_1^{\exp(10)} \frac{\log(x)^n}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} u^n\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^{10} = \frac{10^{n+1}}{n+1}$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^1 + \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 \\ &= \frac{\log(2)}{2} + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(c) Mit partieller Integration erhält man

$$\int \frac{\log(3x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\log(3x)}{-2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2\cdot 3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\log(3x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$$

ÜBUNGSAUFGABE 12.87. Zeige, dass es ein $x_0 \in (0,\infty)$ gibt, sodass $\sin(\mathrm{e}^{x_0}) = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Lösung: Die Funktion $f(x) = \sin(\mathrm{e}^x)$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Für $x = \log(\pi)$ und $y = \log\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ist

$$f(x) = \sin\left(\exp\left(\log\left(\pi\right)\right)\right) = \sin(\pi) = 0$$

und

$$f(y) = \sin\left(\exp\left(\log\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Wegen $0 < \frac{1}{\sqrt{7}} < 1$ folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

ÜBUNGSAUFGABE 12.88. Untersuche die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 17$ ausschließlich mit der Stetigkeitsdefinition auf Stetigkeit im Punkt $x_0 = 2$.

Lösung: Es ist $f(x_0) = 8 - 20 + 12 + 17 = 17$. Sei $\varepsilon > 0$. Mit $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\right\}$ gilt für alle $x \in \mathrm{U}_\delta(x_0)$:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^3 - 5x^2 + 6x\right| = |x-2|\cdot|x-3|\cdot|x| \le |x-2|\cdot 2\cdot 3 < 6\delta \le \varepsilon$$

ÜBUNGSAUFGABE 12.89. Entscheide, für welche $x \in \mathbb{R}$ folgende Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, differenzierbar und/oder stetig differenzierbar sind.

(a) $f(x) = \begin{cases}\mathrm{e}^{-x^2+x} & \text{für } x \ge 1\\ \frac{x^2-x}{x-1} & \text{für } x < 1\end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases}\sin(x) & \text{für } x > 0\\ x & \text{für } x \le 0\end{cases}$

Lösung:

(a) Auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ ist f stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Wir untersuchen nun auf Stetigkeit im Punkt $x_0 = 1$. Da $x \mapsto \exp(-x^2+x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ (also auch für $x = 1$) stetig ist, ist

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \exp(1-1) = 1.$$

Andererseits ist

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}\frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)^2+(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} x - 1 + 1 = 1$$

und somit ist f auch im Punkt $x_0 = 1$ stetig.

Auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ ist f differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen. Wir untersuchen nun auf Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 1$. Einerseits erhält man mit dem Satz von l'Hôpital, dass

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1+}\frac{\exp(-x^2+x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\exp(-x^2+x)(-2x+1) = -1$$

und andererseits ist

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1-} \frac{\frac{x^2-x}{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - x - (x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1-} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = 1$$

und somit ist f im Punkt $x_0 = 1$ nicht differenzierbar (also auch nicht stetig differenzierbar).

(b) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ stetig differenzierbar. Wir untersuchen nun auf Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 0$. Einerseits sieht man, dass

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$$

und andererseits ist

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0-} \frac{x}{x} = 1$$

und somit ist f auch im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar. Wegen $\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1 = f'(1) = \lim_{x \to 0} 1$ ist f' im Punkt x_0 sogar stetig. Insgesamt ist f also stetig differenzierbar (und damit insbesondere stetig) auf ganz $\mathbb{R}$.

Übungsaufgabe 12.90. Entscheide, ob folgende Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 10\right\}$ ein globales Maximum und/oder Minimum besitzen.

(a) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{4x_1^3 + x_2^4}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} & x_1 \neq 0 \text{ und } x_2 \neq 0 \\ 0 & x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0 \end{cases}$

Hinweis: Um zu zeigen, dass f kein Max. besitzt, finde eine Folge x_n, sodass $f(x_n)$ unbeschränkt ist.

Lösung:

(a) Auf $D \backslash \{(0,0)\}$ ist f stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Dass f auch im Punkt $(0,0)$ stetig ist, sieht man wie folgt: Sei $\varepsilon > 0$. Mit $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\right\}$ gilt für alle $x \in \mathrm{U}_\delta(0,0)$, dass

$$\begin{aligned} |f(x_1,x_2) - f(0,0)| &= \left|\frac{4x_1^3 + x_2^4}{x_1^2 + x_2^2}\right| \leq 4\left|\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}\right| + \left|\frac{x_2^4}{x_1^2 + x_2^2}\right| \\ &\leq 4|x_1| + x_2^2 \leq 4\|x\| + \|x\|^2 \leq 5\|x\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Da D kompakt ist, nimmt f auf D ein Maximum und ein Minimum an.

(b) Wegen

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2n}{1n} = 2 \not\to 0 = f(0,0) \ (n \to \infty)$$

ist f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig und somit kann man den Satz über die Existenz von Maximum und Minimum auf kompakten Mengen nicht anwenden! Dass die Funktion f in D kein globales Maximum oder Minimum besitzt, sieht man wie folgt: Es ist

$$\lim_{n \to \infty} f\left(1, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 1n^2}{1n} = n + \frac{1}{n} \to \infty \ (n \to \infty)$$

und

$$\lim_{n \to \infty} f\left(1, -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 1n^2}{-1n} = -n - \frac{1}{n} \to -\infty \ (n \to \infty)$$

Übungsaufgabe 12.91. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^2)x & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Bestimme und klassifiziere, falls existent, ihre lokalen und globalen Extremstellen.

Lösung: Zunächst untersuchen wir f auf Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 0$. Es ist

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$$

und wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0-} \frac{\exp(-x^2)x}{x} = \exp(0) = 1.$$

Damit besitzt die Funktion die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} \exp(-x^2)(1 - 2x^2) & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

f' ist wiederum in $x_0 = 0$ differenzierbar, denn einerseits ist

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+} \frac{1 - 1}{x} = 0$$

und andererseits erhält man mit dem Satz von l'Hôpital (oder direkt mit dem überpolynomiellen Wachstum der Exponentialfuntkion), dass

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to 0-} \frac{\exp(-x^2)(1 - 2x^2) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \to 0-} \exp(-x^2)(-4x - 2x + 4x^3) = 0. \end{aligned}$$

Also ist f zweimal differenzierbar mit

$$f''(x) = \begin{cases} \exp(-x^2)(4x^3 - 6x) & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Bestimmen wir nun die kritischen Punkte von f: Offenbar ist $f'(x) \neq 0$ für $x > 0$. Für $x \leq 0$ ist $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $1 - 2x^2 = 0$, also wenn $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wegen

$$f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2 - 6) > 0$$

handelt es sich bei $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ um eine lokale Minimumstelle. Weitere lokale Extremstellen besitzt die Funktion f nicht.

Nun untersuchen wir das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$. Einerseits ist

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

und andererseits erhält man mit dem Satz von l'Hôpital, dass

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \exp(-x^2)x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\exp(x^2)2x} = 0.$$

Wegen $f(x_1) = -\exp(-\frac{1}{2})/\sqrt{2} < 0 < \infty$ ist x_1 auch eine globale Minimumstelle. Ein globales Maximum besitzt die Funktion hingegen nicht.

Übungsaufgabe 12.92. Bestimme den Gradienten $\nabla f(x)$ und die Hessematrix $H_f(x)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \log(x_1^2 + 2x_2^2 + 1) + x_3$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{2x_1}{x_1^2+2x_2^2+1}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{4x_2}{x_1^2+2x_2^2+1}\\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= 1\end{aligned}$$

und somit

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{x_1^2+2x_2^2+1} \\ \frac{4x_2}{x_1^2+2x_2^2+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Leitet man nun die Komponenten von $\nabla f(x)$ nochmals nach x_1, x_2 und x_3 partiell ab, erhält man

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{-2x_1^2+4x_2^2+2}{(x_1^2+2x_2^2+1)^2} & \frac{-8x_2x_1}{(x_1^2+2x_2^2+1)^2} & 0 \\ \frac{-8x_1x_2}{(x_1^2+2x_2^2+1)^2} & \frac{4x_1^2-8x_2^2+4}{(x_1^2+2x_2^2+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe 12.93. Welche der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch? Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche einen Minuspunkt. Insgesamt können nicht weniger als 0 Punkte erreicht werden.

	Behauptung	**richtig**	**falsch**
(a)	Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen und $c<0$ mit $x_n>c$ für alle $n\in\mathbb{N}^*$, so ist auch $\lim_{n\to\infty} x_n > c$.	☐	☐
(b)	Sei $x_n \geq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}^*$ und $c>0$ mit $n^2x_n \leq c$ für alle $n\in\mathbb{N}^*$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty x_n$ absolut konvergent.	☐	☐
(c)	Sind M und N abzählbare Mengen, so auch $M\times N$.	☐	☐
(d)	Sei $M\subset\mathbb{R}$ und $s\in\mathbb{R}$. Gibt es für alle $\varepsilon>0$ ein $x_\varepsilon\in M$ mit $x_\varepsilon > s-\varepsilon$, so ist $s=\sup M$.	☐	☐
(e)	Sei $x\in\mathbb{C}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine Folge komplexer Zahlen derart, dass jede ihrer konvergenten Teilfolgen gegen x konvergiert. So konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ gegen x.	☐	☐
(f)	Es sei für jedes $n\in\mathbb{N}$ eine offene Menge $M_n\subset\mathbb{R}^N$ gegeben, dann ist ihr Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n$ niemals offen.	☐	☐

Lösung:

(a) falsch! Betrachte z.B. $x_n = c+\frac{1}{n}$. Dann ist $x_n > c$ für alle $n\in\mathbb{N}^*$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.
(b) wahr! Denn es ist $|x_n| = x_n \leq \frac{c}{n^3}$ für alle $n\in\mathbb{N}^*$ und die Behauptung folgt aus dem Majorantenkriterium.
(c) wahr! Vergleiche Aufgabe 6 (b).
(d) falsch! Betrachte z.B. $M=[-1,1]$ und $s=0$. Dann ist für alle $\varepsilon>0$ stets $1>0-\varepsilon$ und $1\in M$ aber $s\neq\sup M$.
(e) falsch! Betrachte z.B. die Folge $x_n=n$. Dann besitzt sie keine konvergenten Teilfolgen (jede konvergente Teilfolge erfüllt also die Bedingung), aber $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergiert nicht.
(f) falsch! Man betrachte z.B. immer die gleiche Menge $M_n = \left\{x\in\mathbb{R}^N : \|x\|<1\right\}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 12.94. Untersuchen3×5 Sie nachstehende Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert:

(a) $x_n = \dfrac{(-1)^n n^3 + 3n^4}{(\sqrt{2}n^2 - 3n)^2}$ (b) $x_n = \dfrac{n! + 2^n}{n^n + n^4}$ (c) $x_n = \dfrac{(100)^n}{(5+10i)^n}$

Lösung:

(a) Es ist

$$x_n = \frac{3n^4 + (-1)^n n^3}{2n^4 - 6\sqrt{2}n^3 + 9n^2} = \frac{3 + (-1)^n/n}{2 - 6\sqrt{2}/n + 9/n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und deshalb konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ gegen 32.

(b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergiert gegen 0, denn für alle $n \geq 2$ ist

$$|x_n| = \left|\frac{n! + 2^n}{n^n + n^4}\right| \leq \frac{2n!}{n^n} \leq 2 \cdot \frac{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n \cdot 1}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n \cdot n} = \frac{2}{n}.$$

(c) Wegen

$$|x_n| = \frac{|100|^n}{|5+10i|^n} = \left(\frac{100}{\sqrt{125}}\right)^n > \left(\frac{100}{\sqrt{144}}\right)^n = \left(\frac{100}{12}\right)^n > 5^n$$

ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ unbeschränkt und deshalb nicht konvergent.

Übungsaufgabe 12.95. Untersuchen3×5 Sie nachstehende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+3}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{i^{2n} \cdot 3n}$

(a) Die Reihe konvergiert nicht, denn es ist

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+3} = \frac{2n+3-n}{n(2n+3)} = \frac{n+3}{2n^2+3n} \geq \frac{n}{5n^2} = \frac{1}{5n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ konvergiert nicht. Damit folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

(b) Die Reihe konvergiert absolut, denn es ist

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n}}\right| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

und da $\left|1/\sqrt{2}\right| < 1$, ist die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

absolut konvergent.

(c) Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, denn es ist

$$\frac{20}{i^{2n} \cdot 3n} = (-1)^n \frac{20}{3n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und die Folge $x_n = 20/3n$ ist eine monoton fallenden positive Nullfolge. Die Reihe ist nicht absolut konvergent, denn es ist

$$\left|\frac{20}{i^{2n} \cdot 3n}\right| = \frac{20}{3n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{3n}$$

ist divergent. Deshalb folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

ÜBUNGSAUFGABE 12.96. Gegeben3 × 6 sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x\,(\sin(y) + y)$.

ÜBUNGSAUFGABE 12.97. Untersuchen Sie die Funktion f ausschließlich mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition auf Stetigkeit im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Lösung: Es sei $\varepsilon > 0$. Mit $\delta := \min\{1, \varepsilon/3\}$ gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| = \|(x,y)\| < \delta$, dass

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x_0,y_0)| &= |x\sin(y) + xy| \\ &\leq |x\sin(y)| + |xy| \\ &< \delta + \delta^2 \leq 2\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

ÜBUNGSAUFGABE 12.98. Zeigen Sie, dass es für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ein $y \in \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 1$ gibt.

Lösung: Es sei $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ vorgegeben. Wir betrachten die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) := \sin(y) + y$. Offenbar ist $f(x,y) = 1$ genau dann, wenn $g(y) = 1/x$. Wählt man $y := 1/x - 1$, so ist

$$g(y) = \sin(y) + y \leq 1 + y = \frac{1}{x}.$$

Wählt man andererseits $y := 1/x + 1$, so ist

$$g(y) = \sin(y) + y \geq y - 1 = \frac{1}{x}.$$

Mit dem Zwischenwertsatz folgt die Behauptung.

ÜBUNGSAUFGABE 12.99. Zeigen Sie, dass für alle $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq 2\,|x| \cdot |y_1 - y_2|$$

Lösung: Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion $g(y) := f(x,y) = x\,(\sin(y) + y)$. Nun seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Für $y_1 = y_2$ ist die Behauptung trivial. OBdA sei $y_1 < y_2$ (sonst tausche y_1 und y_2). Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (y_1, y_2)$, sodass

$$g(y_1) - g(y_2) = g'(\xi)\,(y_1 - y_2)\,.$$

Wegen

$$|g'(\xi)| = |x\,(\cos(\xi) + 1)| \leq 2\,|x|$$

erhalten wir nun

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq 2\,|x| \cdot |y_1 - y_2|\,.$$

ÜBUNGSAUFGABE 12.100. Berechnen2 × 5 Sie folgende bestimmte bzw. unbestimmte Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{10\sin(x)^4\cos(x)}{3\sin(x)^5 + 4}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \sin(x)\,(\exp(2x) + 1)\,\mathrm{d}x$

Lösung:

(a) Wir substituieren $u = \sin(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{10\sin(x)^4\cos(x)}{3\sin(x)^5+4}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \frac{10u^4}{3u^5+4}\,\mathrm{d}u\\ &= \left[\frac{2}{3}\log(3u^5+4)\right]_{u=-1}^{1}\\ &= \frac{2}{3}\left(\log(7)-\log(1)\right) = \frac{2}{3}\log(7).\end{aligned}$$

(b) Zunächst erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\left(\exp(2x)+1\right)\,\mathrm{d}x &= \int \sin(x)\exp(2x)\,\mathrm{d}x + \int \sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \sin(x)\exp(2x)\,\mathrm{d}x - \cos(x).\end{aligned}$$

Das verbleibende Integral bestimmen wir durch zweimaliges partielles Integrieren. Es ist

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\exp(2x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x)\exp(2x) + 2\int \cos(x)\exp(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\cos(x)\exp(2x) + 2\sin(x)\exp(2x) - 4\int \sin(x)\exp(2x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\int \sin(x)\left(\exp(2x)+1\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\exp(2x)}{5}\left(2\sin(x)-\cos(x)\right) - \cos(x).$$

Übungsaufgabe 12.101. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-(x^4-2x^2)}$.

Übungsaufgabe 12.102. Bestimmen6 und klassifizieren Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion f.

Lösung: Die Funktion $f(x) = \exp\left(\log(2)(-(x^4-2x^2))\right)$ ist zweimal differenzierbar und somit muss jede lokale Extremstelle die Bedingung $f'(x) = 0$ erfüllen. Die ersten beiden Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2^{-(x^4-2x^2)}\log(2)\left(-4x^3+4x\right)\\ f''(x) &= 2^{-(x^4-2x^2)}\left(\log(2)\left(-4x^3+4x\right)\right)^2 + 2^{-(x^4-2x^2)}\log(2)\left(-12x^2+4\right)\end{aligned}$$

Es ist

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 4x^3 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 1 \text{ oder } x = -1.$$

Wegen $f''(0) = 4\log(2) > 0$ und $f''(1) = f''(-1) = 2\log(2)(4-12) < 0$ ist 0 lokale Minimumstelle und 1 sowie -1 lokale Maximumstellen. Es gibt keine weiteren lokalen Extremstellen.

Übungsaufgabe 12.103. Entscheiden4 Sie, ob die Funktion f globale Extremstellen besitzt und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

Lösung: Es ist $f(0) = 1$, $f(1) = f(-1) = 2$. Wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ besitzt f kein globales Minimum und 1 sowie -1 sind globale Maximumstellen.

Übungsaufgabe 12.104. Es sei die unendlich oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)x^2$ sowie ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

Übungsaufgabe 12.105. Zeigen8 Sie, dass die n-te Ableitung von f wie folgt lautet:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = \left(n(n-1) + 2nx + x^2\right)\exp(x)$$

Lösung: Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist

$$\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0} f(x) = f(x) = x^2 \exp(x).$$

Es gelte nun

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = \big(n(n-1) + 2nx + x^2\big) \exp(x) \text{ für ein } n \in \mathbb{N},$$

dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} f(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(n(n-1) + 2nx + x^2\big) \exp(x)\\ &= \exp(x)\big(n(n-1) + 2nx + x^2 + 2n + 2x\big)\\ &= \exp(x)\big((n+1)n + 2(n+1)x + x^2\big)\end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung.

Übungsaufgabe 12.106. Bestimmen4 Sie das n-te Taylorpolynom $T_n f(x; x_0)$ der Funktion f im Punkt $x_0 = 0$.

Lösung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Mit Aufgabenteil (a) erhält man

$$T_n f(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{(k-2)!}.$$

Übungsaufgabe 12.107. Es sei $c > 0.4$ Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $g(x,t) := \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right)$ den folgenden beiden Gleichungen genügt:

- $g(x, 0) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $c^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} g(x,t)$ für alle $x, t \in \mathbb{R}$

Lösung: Offenbar ist

$$g(x, 0) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Mit der Kettenregel folgt sofort, dass

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x,t) = \frac{1}{2}\left(c \cdot c \cdot f''(x+ct) + (-c)\cdot(-c)\cdot f''(x-ct)\right) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t)$$

für alle $x, t \in \mathbb{R}$. Dieses Ergebnis ist richtig für alle zweimal differenzierbaren Funktionen f, weshalb es nicht nötig ist, die Definition von f oder Aufgabenteil (a) zu benutzen.

Übungsaufgabe 12.108. In der6 theoretischen Informatik heißt eine endliche nicht-leere Menge Σ ein *Alphabet* und eine endliche Folge von Elementen aus Σ ein *Wort über* Σ. Mit Σ^* bezeichnet man die Menge aller Wörter über Σ, d.h.

$$\Sigma^* := \big\{x_1 x_2 \ldots x_n : n \in \mathbb{N},\ x_i \in \Sigma \quad \forall 1 \le i \le n\big\}.$$

Das leere Wort (der Länge 0) wird auch mit ε bezeichnet. Zeigen Sie, dass für jedes Alphabet Σ die Menge Σ^* abzählbar ist, indem Sie eine Abzählung von Σ^* beschreiben.

Lösung: Es sei Σ eine Menge mit $k \in \mathbb{N}^*$ Elementen. Am Anfang unserer Aufzählung von Σ^* steht das leere Wort ε, dann zählen wir alle k Wörter der Länge 1 auf, gefolgt von allen k^2 Wörtern der Länge 2 u.s.w. In anderen Worten: Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zähle alle k^n (endliche viele!) Wörter der Länge n auf.

ÜBUNGSAUFGABE 12.109. Welche10 der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch?

Für jedes richtig gesetzte Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsch gesetzte einen Minuspunkt. Eine negative Gesamtpunktzahl wird als 0 Punkte gewertet.

Bitte achten Sie darauf, dass eindeutig erkennbar ist, welche Antwort Sie angekreuzt haben!

	Behauptung	**richtig**	**falsch**
(a)	Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist I entweder offen oder abgeschlossen.	☐	☐
(b)	Jede stetige Funktion, die auch noch integrierbar ist, ist differenzierbar.	☐	☐
(c)	Jede kompakte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Minimum.	☐	☐
(d)	Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und nicht leer. Dann gibt es keine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash M$ von Zahlen aus M^c, die gegen $\sup M$ konvergiert.	☐	☐
(e)	Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge reeller Zahlen, sodass die assoziierte Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ absolut konvergiert. Dann besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.	☐	☐
(f)	Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Dann ist auch die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := \exp(f(x))$ monoton.	☐	☐
(g)	Eine monoton wachsende Nullfolge reeller Zahlen ist unbeschränkt.	☐	☐
(h)	Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Teilmenge der reellen Zahlen. Dann ist $M = \mathbb{N}$.	☐	☐
(i)	Es sei $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft partiell differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Gilt nun $\nabla f(x_0) = 0$ und ist die Hessematrix $Hf(x_0)$ negativ definit, so ist x_0 lokale Maximumstelle.	☐	☐
(j)	Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine abgeschlossene, nicht-leere und beschränkte Menge. Dann nimmt die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 \cdot x_3$ ein Maximum und ein Minimum an.	☐	☐

Lösung:

(a) Falsch! Betrachte z.B. das Intervall $(0, 1]$ das weder offen, noch abgeschlossen ist.
(b) Falsch! Jede stetige Funktion ist bereits integrierbar, jedoch nicht differenzierbar. Betrachte z.B. die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := |x|$.
(c) Falsch! Die leere Menge ist kompakt, besitzt jedoch kein Minimum.
(d) Falsch! Sei $s := \sup M$, dann ist $s \in \mathbb{R}$, weil M beschränkt ist. Die Folge $x_n := s + 1/(n+1)$ konvergiert gegen s und es ist $x_n \in \mathbb{R}\backslash M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(e) Richtig! Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notwendigerweise eine Nullfolge, also konvergent. Insbesondere konvergiert dann auch jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.
(f) Richtig! Die Komposition zweier monotoner Funktionen ist stets monoton.
(g) Falsch! Eine jede Nullfolge ist konvergent und somit beschränkt.
(h) Falsch! Betrachte z.B. $M := \mathbb{N} \cup \{\sqrt{2}\}$.
(i) Richtig! Siehe Satz 11.28.
(j) Richtig! Die Menge M ist kompakt und die Funktion f stetig.

Literaturverzeichnis

[1] Richard Courand, Herbert Robbins, Ian Stewart, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, New York, 1996.

[2] David Forster Wallace,*A Compact History of* ∞ *– Everything and more*, Norton, New York, 2003.

[3] Peter Hartmann, *Mathematik für Informatiker*, Vieweg, Wiesbaden 2006.

[4] Konrad Königsberger, *Analysis I*, Springer-Verlag, Berlin 2004.

[5] Konrad Königsberger, *Analysis II*, Springer-Verlag, Berlin 2004.

[6] Michael Oberguggenberger, Alexander Ostermann, *Analysis für Informatiker*, Springer-Verlag, Berlin, 2005