Lineare Optimierung und Differenzialgleichungen

Delio Mugnolo

(delio.mugnolo@uni-ulm.de)

Ulm, 29. Juli 2011.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1.	Einführung in die linearen Optimierungsaufgaben und der Simplexalgorithmus	5
Kapitel 2.	Duale Aufgaben	11
Kapitel 3.	Ganzzahlige lineare Optimierung	17
Kapitel 4.	Netzwerkprobleme und die Transportaufgabe	23
Kapitel 5.	Spieltheorie	41
Kapitel 6.	Differenzialgleichungen: Existenz und Eindeutigkeit	55
Kapitel 7.	Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	61
Kapitel 8.	Differenzialgleichungen höherer Ordnung	75
Literaturverzeichnis		79

KAPITEL 1

Einführung in die linearen Optimierungsaufgaben und der Simplexalgorithmus

Die Geburtstunde der linearen Optimierung wird schön im [**7**, Chapt. 1] geschildert. Dort sieht man Leonid Kantorovitch, ein 26-jähriger Mathematiker, der von einer Sperrholzfabrik um Hilfe gebeten wird. Die Fabrik verfügt über mehrere Maschinensorten: alt und marode, moderner aber weniger effizient, effizient aber wartungsbedürftig. Kantorovitch wird also von der Fabrik angeschrieben:

They wanted to know how to direct their limited stock of raw materials to the different machines so as to get the best use out of it.

In Folge dessen konzipiert Kantorovitch die Grundlagen der linearen Optimierung, wie wir sie heute kennen.

He had seen a method which could do what the conventional work of conventional algebra could not, in situations like the one the Plywood Trust described, and would trick impossibility into disclosing useful knowledge. The method depended on measuring each machine's output of one plywood in terms of all plywoods it could have made.

Kantorovitch, der eigentlich ein Analytiker war, entwickelte tatsächlich eine Umfassende Theorie, um solche Probleme zu lösen. Die Folgerungen waren so bahnbrechend, dass er dann 1975 den Nobelpreis für Wirtschaftwissenschaften erhielt, als erster (und letzter) Sowjetische Forscher der Geschichte.

Die Probleme der linearen Optimierung können folgendermassen aufgefasst werden.

Betrachte die *lineare Maximierungsaufgabe in Standardform*

$$\text{maximiere} \quad z = c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$Ax \leq b$$

und

$$x \geq 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und A eine $n \times m$-Matrix ist.

Ein $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *zulässige Strategie*, und $z = c^T x$ heißt *zulässige Lösung*, falls $Ax \leq b$ und $x \geq 0$. Eine zulässige Strategie x, so dass $z = c^T x$ maximal ist, heißt *optimal*, und $z = c^T x$ heißt *optimale Lösung*.

Beispiel 1.1. Beispiel 1: Das Diätproblem ([**2**, Chapt. 1]) □

Beispiel 1.2. Beispiel 2: Das Bootproduktionsproblem ([**1**, Problem 2.1]) □

Beispiel 1.3. Beispiel 3: Das Produktionsproblem einer Textilfirma ([**6**, §2.2.2]) □

Die graphische Methode: Nur interessant für Probleme mit 2–3 Unbekannten. Anwendung an Beispiel 1.3.

Anschauliche Erklärung von unzulässigen bzw. unbeschränkten Problemen.

Betrachte die *lineare Maximierungsaufgabe in Standardform*

$$\text{maximiere} \quad z = c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$Ax \leq b$$

und

$$x \geq 0$$

über $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und A eine $m \times n$-Matrix ist.

Führe die Schlupfvariablen $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ ein, so dass $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Untersuche die neue Aufgabe

$$\text{maximiere} \quad z = c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

und

$$\tilde{x} \geq 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{A} := (A \ \ I_m)$ eine $(n+m) \times m$-Matrix ist. Dabei ist $(A \ \ I_m)$ die Matrix, welche aus der Nebeneinandersetzung zweier kleinerer Matrizen (die ursprüngliche Matrix A und die $m \times m$-Einheitsmatrix) entsteht.

Der Simplexalgorithmus. Bilde ein *Wörterbuch*, d.h., drücke die m Schlupfvariablen und die Zielfunktion z durch die n Entscheidungsvariablen aus.

(1) Betrachte die Zielfunktion und entscheide, welche Variable x_i (aus den n-Variablen) könnte(n) vergrößert werden, um die Zielfunktion zu vergrößern.
(2) Maximiere x_i unter der Beschränkung, dass die m-Variablen positiv sein müssen: sei x_j eine Variable, deren Positivität die strengste Bedingung an x_i stellt.
(3) "Pivoting": vertausche die Rollen von x_i und x_j.
(4) Drücke also x_i durch x_j aus und bilde weiter ein gesamtes neues Wörterbuch. Der Algorithmus bricht ab, wenn z nicht mehr durch die n-Variablen vergrößert werden kann, also wenn z eine affine Funktion ist, welche als Koeffizienten der n-Variablen nur negative Zahlen hat. Sonst fange wieder bei (1) an.

Anmerkung 1.4. Sowohl bei (1) als auch bei (2) ist die Wahl einer Variable möglicherweise willkürlich.

Beispiel 1.5. Lösung der Aufgabe 1.3 durch den Simplexalgorithmus. Zur Maximierung der Zielfunktion $z = 2000x_1 + 1000x_2$ führe die Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5 ein.

- Das erste Wörterbuch ist

$$\begin{array}{rcrrr} x_3 & = & 24 & -2x_1 & -2x_2 \\ x_4 & = & 24 & -4x_1 & -x_2 \\ x_5 & = & 36 & -x_1 & -4x_2 \\ \hline z & = & & 2000x_1 & +1000x_2. \end{array}$$

- Die Zielfunktion z kann durch Vergrößerung von x_1, x_2 vergrößert werden. Setze $x_2 = 0$ und maximiere z bzgl. x_1: erhalte $x_1 = 6$ aus der Gleichung zu x_4.
- Pivoting $x_1 \leftrightarrow x_4$ liefert das zweite Wörterbuch

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 6 & -\frac{1}{4}x_2 & -\frac{1}{4}x_4 \\ x_3 & = & 12 & -\frac{3}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_4 \\ x_5 & = & 30 & -\frac{15}{4}x_2 & +\frac{1}{4}x_4 \\ \hline z & = & 12000 & 500x_2 & -500x_4. \end{array}$$

- Die Zielfunktion z kann nur durch Vergrößerung von x_2 vergrößert werden. Setze $x_4 = 0$ und maximiere z bzgl. x_2: erhalte $x_2 = 8$ aus der Gleichung zu x_3.
- Pivoting $x_2 \leftrightarrow x_3$ liefert das dritte Wörterbuch

$$\begin{array}{rcrrr} x_2 & = & 8 & -\frac{2}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\ x_1 & = & 4 & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\ x_5 & = & 30 & -\frac{5}{2}x_3 & +\frac{5}{4}x_4 \\ \hline z & = & 16000 & -\frac{1000}{3}x_3 & -\frac{1000}{3}x_4. \end{array}$$

- Die Zielfunktion z kann *nicht* weiter durch Vergrößerung von x_3 oder x_4 vergrößert werden. Also beträgt ihr optimaler Wert 16000.
- Durch das Einsetzen von $x_3 = x_4 = 0$ ins dritte Wörterbuch erhält man die optimale Strategie

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = 8.$$

$\square$

Beispiel 1.6. Lösung der Aufgabe 1.2 durch den Simplexalgorithmus.

- Das erste Wörterbuch ist

$$\begin{array}{lclllll}
x_4 & = & 63 & -3x_1 & -\frac{3}{2}x_2 & -x_3 \\
x_5 & = & 110 & -2x_1 & -3x_2 & -2x_3 \\
x_6 & = & 50 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\
\hline
z & = & & 200x_1 & +150x_2 & +120x_3.
\end{array}$$

- Die Zielfunktion z kann durch Vergrößerung von x_1, x_2, x_3 vergrößert werden. Setze $x_2 = x_3 = 0$ und maximiere z bzgl. x_1: erhalte $x_1 = 21$ aus der Gleichung zu x_4.
- Pivoting $x_1 \leftrightarrow x_4$ liefert das zweite Wörterbuch

$$\begin{array}{lclllll}
x_1 & = & 21 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\
x_5 & = & 68 & -2x_2 & -\frac{4}{3}x_3 & +\frac{2}{3}x_4 \\
x_6 & = & 29 & -\frac{x_2}{2} & -\frac{2}{3}x_3 & +\frac{x_4}{3} \\
\hline
z & = & 4200 & +50x_2 & +\frac{160}{3}x_3 & -\frac{200}{3}x_4.
\end{array}$$

- Die Zielfunktion z kann durch Vergrößerung von x_1, x_3 vergrößert werden. Setze $x_2 = x_4 = 0$ und maximiere z bzgl. x_3: erhalte $x_3 = \frac{87}{2}$ aus der Gleichung zu x_6.
- Pivoting $x_3 \leftrightarrow x_6$ liefert das dritte Wörterbuch

$$\begin{array}{lclllll}
x_3 & = & \frac{87}{2} & -\frac{3}{4}x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & -\frac{3}{2}x_6 \\
x_1 & = & \frac{13}{2} & -\frac{1}{4}x_2 & -\frac{1}{2}x_4 & \frac{1}{2}x_6 \\
x_5 & = & 10 & -x_2 & & +2x_6 \\
\hline
z & = & 6520 & +10x_2 & -40x_4 & -80x_6.
\end{array}$$

- Die Zielfunktion z kann durch Vergrößerung von x_2 vergrößert werden. Setze $x_4 = x_6 = 0$ und maximiere z bzgl. x_2: erhalte $x_2 = 10$ aus der Gleichung zu x_5.
- Pivoting $x_2 \leftrightarrow x_{10}$ liefert das vierte Wörterbuch

$$\begin{array}{lclllll}
x_2 & = & 10 & & -x_5 & +2x_6 \\
x_1 & = & 4 & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{4}x_5 & \\
x_3 & = & 36 & +\frac{1}{4}x_4 & +\frac{3}{4}x_5 & -3x_6 \\
\hline
z & = & 6620 & -40x_4 & -10x_5 & -60x_6.
\end{array}$$

- Die Zielfunktion z kann *nicht* weiter durch Vergrößerung von x_4, x_5 oder x_6 vergrößert werden. Also beträgt ihr optimaler Wert 6620.

- Durch das Einsetzen von $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ ins vierte Wörterbuch erhält man die optimale Strategie
$$x_1 = 4, \qquad x_2 = 10, \qquad x_3 = 36.$$

$\square$

Es gibt nur $\binom{n+m}{m}$ mögliche Wörterbücher. In der Regel kann sich kein Wörterbuch wiederholen. Falls dies passiert heißt das, dass der Algorithmus in einen Zykel gefallen ist. Um Zyklen zu meiden reicht es, die Regel des kleinsten Index anzuwenden.

Regel des kleinsten Index. Gibt es mehrere Möglichkeiten, eine Variable auszuwählen (s. Anmerkung 1.4), so wähle darunter immer diejenige, die den kleinsten Index hat. ([**2**, Thm. 3.3])

Satz 1.7. *Der Simplexalgorithmus bricht schließlich immer ab, es sein denn, er ist in einen Zykel gefallen.* ([**2**, Thm. 3.1])

Der Fundamentalsatz der linearen Optimierung. *Eine lineare Maximierungsaufgabe hat immer eine optimale Lösung, es sein denn, die Aufgabe ist unzulässig ($\equiv$ keine Lösung) oder unbeschränkt ($\equiv$ unendlich viele Lösungen).* ([**2**, Thm. 3.4])

Es kann natürlich sein, dass unendlich viele Strategien zur selben optimalen Lösung führen.

Allgemeine Anmerkungen zum Simplexalgorithmus.

- Die Daten aller genannten Beispiele sind nicht notwendigerweise realistisch.
- Die Probleme wurden bewusst schematisiert. Ein wichtiger Teil der angewandten linearen Optimierung besteht darin, die Probleme aus der Praxis derart zu abstrahieren, dass man eine Optimierungsaufgabe erhält.
- Selbst wenn alle Daten ganzzahlig sind kann es sein, dass die erhaltene optimale Strategie das nicht ist. Meistens bleibt es möglich, die Daten weiterhin zu interpretieren. Möchte man unbedingt eine ganzzahlige Strategie haben, so greift man zur Theorie der ganzzahligen linearen Optimierung (Kapitel 3).
- Sollen Variablen einer Maximierungsaufgabe eine $\geq$-Ungleichung erfüllen (z.B. $2x_3 + x_4 \geq 7$), so kann das Problem in Standardform gebracht werden, indem man Vorzeichen wechselt (also $-2x_3 - x_4 \leq -7$).
- Betrachtet man eine Minimierungsaufgabe für die Zielfunktion z unten den Beschränkungen $Ax \geq b$, so kann man sie als Maximierungsaufgabe darstellen, indem man die Zielfunktion $-z$ unter den Beschränkungen $-Ax \leq -b$ und $x \geq 0$ maximiert.
- Sollen Variablen einer Maximierungsaufgabe eine Gleichung erfüllen (z.B. $2x_3 + x_4 = 7$), so kann das Problem in Standardform gebracht werden, indem man die Gleichung durch zwei entsprechende Ungleichungen ersetzt (also $2x_3 + x_4 \leq 7$ und $-2x_3 - x_4 \leq -7$). Das macht natürlich wenig Sinn, wenn man den Simplexalgorithmus anwenden will, denn durch diese Transformation ist man gezwungen, zwei Schlupfvariablen einzuführen, die man sonst nicht gebraucht hätte.
- Darf eine Variable x_j einer Maximierungsaufgabe auch negative Werte annehmen (z.B. $2x_1 + x_2 \geq 7$, $x_1 \geq 0$ aber *nicht* notwendigerweise $x_2 \geq 0$), so kann das Problem in Standardform gebracht werden, indem man zwei neue künstliche Variablen x_j^+, x_j^-, welche beide ≥ 0 sind und die Gleichung $x_j = x_j^+ - x_j^-$ erfüllen müssen, einführt.

KAPITEL 2

Duale Aufgaben

Betrachte die lineare Maximierungsaufgabe

$$\text{maximiere} \quad z = c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$Ax \leq b$$

und

$$x \geq 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und A eine $m \times n$-Matrix ist.

Ihre duale Aufgabe ist die lineare Minimierungsaufgabe

$$\text{minimiere} \quad w = b^T y$$

unter den Beschränkungen

$$A^T y \geq c$$

und

$$y \geq 0$$

über $y \in \mathbb{R}^m$, wobei c, b, A die selben Vektoren bzw. die selbe Matrix der obigen Maximierungsaufgabe sind.

Satz 2.1. *Das Dual zur dualen Aufgabe ist wieder die ursprüngliche Aufgabe, die sog.* primale *Aufgabe.*

Schwacher Dualitätsatz. *Ist x eine zulässige Strategie der primalen Aufgabe und y eine zulässige Strategie ihrer dualen Aufgabe, so gilt*

$$c^T x \leq b^T y. \tag{2.1}$$

Es gilt nämlich

$$c^T x \leq y^T A^T x = x^T A y \leq b^T y.$$

Insbesondere erfüllen die Zielfunktionen z, w der primalen bzw. dualen Aufgabe $z \leq w$. ([**10**, Thm. 3.23])

Starker Dualitätsatz. *Sei x eine zulässige Strategie der primalen Aufgabe und y eine zulässige Strategie ihrer dualen Aufgabe, so dass $c^T x = b^T y$. Dann gilt*

$$c^T x = \max\{c^T \tilde{x} : A\tilde{x} \leq b,\ \tilde{x} \geq 0\}$$

und

$$b^T y = \max\{b^T \tilde{y} : A^T \tilde{y} \geq c,\ \tilde{y} \geq 0\},$$

und insbesondere sind x, y optimale Strategien. ([**10**, Thm. 3.23])

Korollar. *Sei x eine zulässige Lösung der primalen Aufgabe und y eine optimale Lösung ihrer dualen Aufgabe, so dass $c^T x = b^T y$. Dann ist x ebenfalls eine optimale Lösung.* ([**10**, Thm. 3.23])

Fundamentalsatz der Dualität. *Hat die primale Aufgabe eine optimale Lösung z^*, so hat ihre duale Aufgabe eine optimale Lösung w^*. Hat die duale Aufgabe eine optimale Lösung w^*, so hat ihre primale Aufgabe eine optimale Lösung z^*. In beiden Fälle gilt $z^* = w^*$.*

Satz (komplementäre Schlupfbedingung). *Seien x, y zulässige Strategien der primalen bzw. dualen Aufgabe mit zugehörigen Schlupfvariablen x_s, y_s, so sind $(x, x_s), (y, y_s)$ genau dann optimal, wenn die Bedingung*

$$x^T y_s + x_s^T y = 0$$

erfüllt ist. ([**10**, Thm. 3.25])

Der obige Satz ist z.B. nützlich, wenn man eine optimale Strategie der dualen Aufgabe kennt und gleichzeitig eine zulässige Strategie der primalen Aufgabe, die aus einer Simplexalgorithmus-Durchführung kommt, die vielleicht in einen Zykel gefallen ist. Dadurch kann man die zulässige Strategie der primalen Aufgabe auf Optimalität prüfen.

Eine alternative Formulierung des Satzes ist oft einfacher anzuwenden. Zu beachten ist, dass die duale Aufgabe nur als Mittel im Beweis auftaucht, nicht aber in der Aussage.

Satz (komplementäre Schlupfbedingung - II). *Sei x eine zulässige Strategie einer linearen Maximierungsaufgabe. Dann ist sie genau dann optimal, wenn $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_m \geq 0$ existieren, so dass $\tilde{y}_i = 0$ falls $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < \beta_i$, $i = 1, \ldots, m$, und zusätzlich*

$$\sum_{a_{ij}\tilde{y}_i} \geq c_j \text{ für alle } j = 1, \ldots, n \qquad \text{und sogar} \qquad \sum_{a_{ij}\tilde{y}_i} = c_j \text{ falls } x_j > 0.$$

([**2**, Thm. 5.3])

Der folgende Satz ist eine Konsequenz des schwachen Dualitätsatzes.

Satz 2.2. *Ist die primale Aufgabe unbeschränkt, so ist die duale Aufgabe unzulässig, und umgekehrt: Ist die duale Aufgabe unbeschränkt, so ist die primale Aufgabe unzulässig. (*[**10**, Thm. 3.5]*)*

Satz 2.3. *Ist die primale Aufgabe unzulässig, so kann die duale Aufgabe keine optimale Lösung haben. (*[**10**, Thm. 3.27]*)*

Trotzdem kann es passieren, dass sowohl die primale als auch ihre duale Aufgabe unzulässig sind. Also können primale und duale Aufgaben nur vier mögliche paarweise Eigenschaften haben:

- Sie können beide eine optimale Lösung haben.
- Sie können beide unzulässig sein.
- Die primale Aufgabe kann unbeschränkt und die duale Aufgabe unzulässig sein.
- Die primale Aufgabe kann unzulässig sein und die duale Aufgabe unbeschränkt.

Die folgenden fünf Fälle können also nicht vorkommen:

- Primale und duale Aufgabe sind beide unbeschränkt.
- Die primale Aufgabe hat eine optimale Lösung aber die duale Aufgabe ist unzulässig.
- Die primale Aufgabe hat eine optimale Lösung aber die duale Aufgabe ist unbeschränkt.

- Die primale Aufgabe ist unbeschränkt und die duale Aufgabe hat eine optimale Lösung.
- Die primale Aufgabe ist unzulässig und die duale Aufgabe hat eine optimale Lösung.

Zusammenfassung der Fälle: [**2**, Tabelle 5.1], [**1**, Thm. 5.3].

Beispiel. Die Aufgabe

$$\text{maximiere} \quad z = c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$Ax \leq b$$

und

$$x \geq 0,$$

und ihre duale Aufgabe, wobei $c = (2\ -1)$, $b = (1\ -2)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Sowohl die primale als auch die duale Aufgabe ist unzulässig, denn es gibt keine $x_1, x_2 \geq 0$, so dass $1 \geq x_1 - x_2 \geq 2$.

Die duale Aufgabe kann Vorteile gegenüber der primale Aufgabe haben: ist z.B. A eine $m \times n$-Matrix mit $m \gg n$, so kann es manchmal hilfreich sein, die duale Aufgabe stattdessen zu lösen (weniger Schlupfvariablen, also weniger Gleichungen in den Wörterbücher). Allerdings erhält man i.A. nur einen optimalen Wert der Zielfunktion und keine optimale Strategie der primalen Aufgabe. Andererseits ist nach dem starken Dualitätssatz jede zulässige Lösung der primalen Aufgabe auch optimal, sobald sie einen Wert der (primalen) Zielfunktion ergibt, der gleich dem optimalen Wert der Zielfunktion der dualen Aufgabe ist.

Beispiel. Betrachte die folgende lineare Maximierungsaufgabe: Maximiere $z = c^T x$ unter den Beschränkungen

$$Ax \leq b$$

und

$$x \geq 0,$$

wobei

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 7 \\ 9 & -4 \\ -5 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Stattdessen lösen wir die duale Aufgabe: Minimiere $w = b^T y$ unter den Beschränkungen

$$A^T y \geq c,$$

d.h. maximiere $-w = y_1 - y_2 - 6y_3 - 6y_4 + 3y_5 - 6y_6$ unter den Beschränkungen

$$\begin{aligned} 3y_1 - y_2 + 2y_3 - 9y_4 + 5y_5 - 7y_6 &\leq 1 \\ -y_1 + y_2 - 7y_3 + 4y_4 - 2y_5 + 3y_6 &\leq 2 \end{aligned}$$

und

$$y \geq 0.$$

Führe Schlupfvariablen x_7, x_8 ein.

- Das erste Wörterbuch ist

$$\begin{array}{rclllllll} y_7 & = & 1 & -3y_1 & +y_2 & -2y_3 & +9y_4 & -5y_5 & +7y_6 \\ y_8 & = & 2 & +y_1 & -y_2 & +7y_3 & -4y_4 & +2y_5 & -3y_6 \\ \hline -w & = & & y_1 & -y_2 & -6y_3 & -6y_4 & +3y_5 & -6y_6. \end{array}$$

- Die Zielfunktion $-w$ kann durch Vergrößerung von y_1, y_5 vergrößert werden. Setze $y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$ und maximiere z bzgl. y_1: erhalte $y_1 = \frac{1}{3}$ aus der Gleichung zu y_7.
- Pivoting $y_1 \leftrightarrow y_7$ liefert das zweite Wörterbuch

$$\begin{array}{rclllllll} y_1 & = & \frac{1}{3} & +\frac{1}{3}y_2 & -\frac{2}{3}y_3 & +3y_4 & -\frac{5}{3}y_5 & +\frac{7}{3}y_6 & -\frac{1}{3}y_7 \\ y_8 & = & \frac{7}{2} & -\frac{2}{3}y_2 & +\frac{19}{3}y_3 & -y_4 & -\frac{1}{3}y_5 & +\frac{1}{3}y_6 & -\frac{1}{3}y_7 \\ \hline -w & = & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}y_2 & -\frac{20}{3}y_3 & -3y_4 & +\frac{4}{3}y_5 & -\frac{11}{3}y_6 & -\frac{1}{3}y_7. \end{array}$$

- Die Zielfunktion $-w$ kann durch Vergrößerung von y_5 vergrößert werden. Setze $y_2 = y_3 = y_4 = y_6 = y_7 = 0$ und maximiere z bzgl. y_5: erhalte $y_5 = \frac{1}{5}$ aus der Gleichung zu y_1.
- Pivoting $y_5 \leftrightarrow y_1$ liefert das dritte Wörterbuch

$$\begin{array}{rclllllll} y_5 & = & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}y_1 & +\frac{1}{5}y_2 & -\frac{2}{5}y_3 & +\frac{9}{5}y_4 & +\frac{7}{5}y_6 & -\frac{1}{5}y_7 \\ y_8 & = & \frac{103}{30} & \frac{1}{5}y_1 & -\frac{11}{15}y_2 & +\frac{97}{15}y_3 & -\frac{8}{5}y_4 & -\frac{2}{15}y_6 & -\frac{6}{15}y_7 \\ \hline -w & = & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}y_1 & -\frac{2}{5}y_2 & -\frac{36}{5}y_3 & -\frac{3}{5}y_4 & -\frac{9}{5}y_6 & -\frac{3}{5}y_7. \end{array}$$

- Die Zielfunktion $-w$ kann nicht weiter durch Vergößerung von y_1, y_2, y_3, y_4, y_6 oder y_7 vergrößert werden. Also beträgt ihr optimaler Wert $\frac{3}{5}$. (Durch das Einsetzen von $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_6 = y_7 = 0$ ins dritte Wörterbuch erhält man die optimale Strategie

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 = \frac{1}{5},\ y_6 = 0.)$$

- Die optimale Lösung w der dualen Aufgabe, also $-\frac{3}{5}$, ist auch optimale Lösung der primalen Aufgabe.
- Es reicht, eine zulässige Strategie der primalen Aufgabe zu finden, unter welcher die Zielfunktion z den Wert $-\frac{3}{5}$ annimmt, um schließen zu können, dass sie auch optimal ist. Man rät zum Beispiel die zulässige Lösung

$$x_1 = \frac{3}{5}, \qquad x_2 = 0,$$

welche notwendigerweise auch optimal ist.

Man kann alternativ auch den 2. Satz über die komplementären Schlupfbedingungen anwenden: es gilt nämlich $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \frac{3}{5}a_{i1} < b_i$ für $i = 1, 2, 3, 4, 6$, so dass man $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = \tilde{y}_4 = \tilde{y}_6 = 0$ setzt und nur noch überprüfen muss, dass $\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\tilde{y}_i = a_{51}\tilde{y}_5 = -1$ und $\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\tilde{y}_i = a_{52}\tilde{y}_5 \geq -2$ von einer Zahl $\tilde{y}_5 \geq 0$ erfüllt werden können. Die erste Bedingung liefert $\tilde{y}_5 = \frac{1}{5}$, was selbstverständlich auch die zweite erfüllt. ([**2**, Problem 5.2])

Intepretation der dualen Aufgabe: Optimierung von Stücke/EUR, Schattenpreise. ([**2**, S. 65], [**6**, §2.7]).

Beispiel. Betrachte die folgende lineare Maximierungsaufgabe: Maximiere $z = c^T x$ unter den Beschränkungen

$$Ax \leq b$$

und

$$x \geq 0,$$

wobei

$$c = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 100 \\ 4000 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 50 \end{pmatrix}.$$

Die optimalen Strategien der primalen bzw. dualen Aufgabe sind

$$x = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} \frac{65}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Interpretation von y. ([**2**, S. 67])

Satz 2.4. *Hat eine lineare Maximierungsaufgabe eine optimale Lösung z und bezeichne y eine optimale Strategie ihrer dualen Aufgabe, so gibt es $\varepsilon > 0$, so dass für alle $r \in \mathbb{R}^m$ mit $r_1, \ldots, r_m \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die lineare Maximierungsaufgabe*

$$\text{maximiere} \quad z = c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$Ax \leq b + r$$

und

$$x \geq 0,$$

eine optimale Lösung $\tilde{z}$ hat. Diese Lösung ist durch $\tilde{z} = z + r^T y$ gegeben.

In anderen Worten: Wird die i-te Ressource (ein wenig!) um r_i Einheiten geändert (für alle $i = 1, \ldots, m$), so ändert sich die optimale Lösung (ein wenig!) um $r^T y$.

KAPITEL 3

Ganzzahlige lineare Optimierung

Wir führen die duale Simplex-Methode ein.

Der duale Simplexalgorithmus. Starte mit einem Wörterbuch

$$
\begin{array}{ccc}
\tilde{x}_s & = & \tilde{b} \quad -\tilde{A}\tilde{x} \\
\hline
\tilde{z} & = & \tilde{d} \quad +\tilde{c}^T\tilde{x}
\end{array}
$$

für eine (primale) Maximierungsaufgabe.

(1) Wähle einen Index $i \in \{1, \ldots, m\}$ so, dass $\tilde{b}_i < 0$. Falls das nicht möglich ist bricht der Algorithmus ab, sonst gehe zu (2).
(2) Wähle einen Index $j \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass $\tilde{a}_{ij} < 0$ und

$$\frac{\tilde{c}_j}{\tilde{a}_{ij}} = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\tilde{c}_k}{\tilde{a}_{ik}} \right\}.$$

Falls das nicht möglich ist bricht der Algorithmus ab, sonst gehe zu (3).
(3) "Pivoting": vertausche die Rollen von x_i und x_j.
(4) Drücke also x_j durch x_i aus und bilde weiter ein gesamtes neues Wörterbuch, dann fange wieder bei (1) an.

Beispiel 3.1. Wir führen eine Iteration des dualen Simplexalgorithmus zum Wörterbuch

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & = & \frac{16}{9} & -\frac{1}{27}x_4 & -\frac{4}{27}x_5 \\
x_2 & = & \frac{7}{6} & -\frac{1}{9}x_4 & +\frac{1}{18}x_5 \\
x_3 & = & -\frac{7}{9} & +\frac{1}{27}x_4 & +\frac{4}{27}x_5 \\
\hline
z & = & \frac{143}{9} & -\frac{14}{27}x_4 & -\frac{31}{54}x_5
\end{array}
$$

durch. Also ist

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ \frac{7}{9} \\ -\frac{7}{9} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{27} & -\frac{4}{27} \end{pmatrix}, \quad d = \frac{143}{9}, \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{27} \\ -\frac{31}{54} \end{pmatrix}.$$

Der Index i ist notwendigerweise 3 ($\to x_3$). Die Bedingung $a_{3j} < 0$ ist sowohl für $j = 1$ ($\to x_4$) als auch für $j = 2$ ($\to x_5$) erfüllt, aber $\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{a}_{31}} = 14 > \frac{31}{8} = \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{a}_{32}}$. Man soll also die Rollen von x_3 und x_5 vertauschen.

$$\begin{array}{rcccc}
x_5 & = & \frac{21}{4} & +\frac{27}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 \\
x_2 & = & 2+\frac{5}{8} & +\frac{3}{8}x_3 & -\frac{1}{8}x_4 \\
x_1 & = & 1 & -x_3 & \\
\hline
z & = & \frac{103}{8} & -\frac{3}{8}x_3 & -\frac{31}{3}x_4,
\end{array}$$

□

Betrachte die Aufgabe

$$\text{maximiere} \quad z = c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$Ax \leq b$$

und

$$x \in \mathbb{N}.$$

Ein möglicher Zugang beruht auf der folgenden, von Gomory eingeführten, Methode.

Der Gomory-Algorithmus. Betrachte die Aufgabe

$$\text{maximiere} \quad z = c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$Ax \leq b$$

und

$$x \in \mathbb{N}.$$

Löse zuerst die Aufgabe

$$\text{maximiere} \quad z = c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$Ax \leq b$$

und

$$x \geq 0$$

und erhalte dadurch ein Wörterbuch. Ist die Lösung bereits ganzzahlig, höre auf. Sonst, führe den folgenden Algorithmus durch.

(1) Drücke das letze erhaltene Wörterbuch als System

$$\begin{array}{rcccl}
\tilde{x}_s & = & \tilde{b} & -\tilde{A}\tilde{x} & = \lfloor \tilde{b} \rfloor + \beta - \tilde{A}\tilde{x} \\
\hline
\tilde{z} & = & \tilde{d} & +\tilde{c}^T\tilde{x} &
\end{array}$$

aus, wobei $\tilde{A}$ eine Matrix und $\lfloor \tilde{b} \rfloor$ ein Vektor mit ganzzahligen Einträge und β ein Vektor mit $[0, 1)$-Einträgen ist (Dezimalteile der Einträge von $\tilde{b}$). Finde den größten Eintrag von β, etwa

β_k (wenn es mehrere größte Einträge gibt, dann nimm denjenigen mit kleinstem Index), unter denen, die sich auf eine Variable beziehen, welche ganzzahlig sein soll.

(2) Schreibe den k-ten Eintrag des Gleichungssystems als

$$\tilde{x_k} = \lfloor \tilde{b}_t \rfloor + \beta_t - \sum_{j=1}^{m} (\lfloor \tilde{a_{kj}} \rfloor + \alpha_{kj}) \tilde{x_j}$$

(3) Bilde ein neues, erweitertes Wörterbuch durch Einfügen einer neuen Schlupfvariable x_G (sog. Gomory-Variable), definiert durch

$$x_G := -\beta_t + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj} \tilde{x_j},$$

ins Wörterbuch.

(4) Versuche, eine Iteration des dualen Simplexalgorithmus zu diesem erweiterten Wörterbuch durchzuführen. Der Algorithmus bricht ab, falls dies nicht möglich ist: Dann hat die ganzzahlige Aufgabe keine Lösung. Sonst fange wieder bei (1) an.

([**10**, Algorithmus 3.37])

Beispiel 3.2. Betrachte die Aufgabe

$$\text{maximiere} \quad z = c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$Ax \leq b$$

und

$$x \in \mathbb{N},$$

wobei

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zur Maximierung der Zielfunktion z führe die Schlupfvariablen x_3, x_4 ein.

- Das erste Wörterbuch ist

$$\begin{array}{ccccc} x_3 & = & 24 & -3x_1 & -8x_2 \\ x_4 & = & 6 & -6x_1 & -2x_2 \\ \hline z & = & & 5x_1 & +3x_2. \end{array}$$

- Die Zielfunktion z kann durch Vergrößerung von x_1, x_2 vergrößert werden. Setze $x_2 = 0$ und maximiere z bzgl. x_1: erhalte $x_1 = 1$ aus der Gleichung zu x_4.
- Pivoting $x_1 \leftrightarrow x_4$ liefert das zweite Wörterbuch

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & = & 1 & +\frac{1}{3}x_2 & -\frac{1}{6}x_4 \\ x_3 & = & 21 & -9x_2 & +\frac{1}{2}x_4 \\ \hline z & = & 5 & +\frac{14}{3}x_2 & -\frac{5}{6}x_4. \end{array}$$

- Die Zielfunktion z kann durch Vergrößerung von x_2 vergrößert werden. Setze $x_4 = 0$ und maximiere z bzgl. x_2: erhalte $x_2 = \frac{7}{3}$ aus der Gleichung zu x_3.
- Pivoting $x_3 \leftrightarrow x_2$ liefert das dritte Wörterbuch

$$\begin{array}{rclll} x_2 & = & \frac{7}{3} & -\frac{1}{9}x_3 & +\frac{1}{18}x_4 \\ x_1 & = & \frac{16}{9} & -\frac{1}{27}x_3 & -\frac{4}{27}x_4 \\ \hline z & = & \frac{143}{9} & -\frac{14}{27}x_3 & -\frac{31}{54}x_4. \end{array}$$

  Damit ist die Aufgabe *ohne* die Einschränkungen $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ gelöst.
- Schreibe nun das letzte Wörterbuch als

$$\begin{array}{rclll} x_2 & = & 2+\frac{1}{3} & -\frac{1}{9}x_3 & +\frac{1}{18}x_4 \\ x_1 & = & 1+\frac{7}{9} & -\frac{1}{27}x_3 & -\frac{4}{27}x_4 \\ \hline z & = & \frac{143}{9} & -\frac{14}{27}x_3 & -\frac{31}{54}x_4. \end{array}$$

  um. Der Index $i = 2$ ($\leftarrow x_1$) ist derjenige, bei dem b_i den größten Dezimalteil hat. Führe die Gomory-Variable x_{G_1} ein und betrachte das erweiterte Wörterbuch

$$\begin{array}{rclll} x_2 & = & 2+\frac{1}{3} & -\frac{1}{9}x_3 & +\frac{1}{18}x_4 \\ x_1 & = & 1+\frac{7}{9} & -\frac{1}{27}x_3 & -\frac{4}{27}x_4 \\ x_{G_1} & = & -\frac{7}{9} & +\frac{1}{27}x_3 & +\frac{4}{27}x_4 \\ \hline z & = & \frac{143}{9} & -\frac{14}{27}x_3 & -\frac{31}{54}x_4. \end{array}$$

- Führe eine Iteration des dualen Simplexalgorithmus durch (vgl. Beispiel 3.1) und erhalte das Wörterbuch

$$\begin{array}{rclll} x_4 & = & \frac{21}{4} & -\frac{1}{4}x_3 & +\frac{27}{4}x_{G_1} \\ x_2 & = & 2+\frac{5}{8} & -\frac{1}{8}x_3 & +\frac{3}{8}x_{G_1} \\ x_1 & = & 1 & & -x_{G_1} \\ \hline z & = & \frac{103}{8} & -\frac{3}{8}x_3 & -\frac{31}{3}x_{G_1}, \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rcllll} x_4 & = & \frac{21}{4} & -\frac{1}{4}x_3 & +\frac{27}{4}x_{G_1} \\ x_2 & = & 2+\frac{5}{8} & -\frac{1}{8}x_3 & +\frac{3}{8}x_{G_1} \\ x_1 & = & 1 & & -x_{G_1} \\ \hline z & = & \frac{103}{8} & -\frac{3}{8}x_3 & -\frac{31}{3}x_{G_1}, \end{array}$$

(Es ist irrelevant, $\frac{21}{4}$ als $5+\frac{1}{4}$ auszudrücken, denn diese Zahl bezieht sich auf die Variable x_4, deren Ganzzahligkeit nicht gefordert wird.)

- Der Index $i = 2$ ($\to x_2$) ist der einzige, bei dem b_i einen Dezimalteil hat. Führe die Gomory-Variable x_{G_2} ein und betrachte das erweiterte Wörterbuch

$$\begin{array}{rcllll} x_4 & = & \frac{21}{4} & -\frac{1}{4}x_3 & +\frac{27}{4}x_{G_1} \\ x_2 & = & 2+\frac{5}{8} & -\frac{1}{8}x_3 & +\frac{3}{8}x_{G_1} \\ x_1 & = & 1 & & -x_{G_1} \\ x_{G_2} & = & -\frac{5}{8} & +\frac{1}{8}x_3 & -\frac{3}{8}x_{G_1} \\ \hline z & = & \frac{103}{8} & -\frac{3}{8}x_3 & -\frac{31}{3}x_{G_1}. \end{array}$$

Führe eine Iteration des dualen Simplexalgorithmus mit $i = 4$ ($\to x_{G_2}$) und $j = 1$ ($\to x_3$) durch und erhalte nach Pivoting $x_{G_2} \leftrightarrow x_3$ das neue erweiterte Wörterbuch

$$\begin{array}{rcllll} x_3 & = & 5 & +3x_{G_1} & +8x_{G_2} \\ x_4 & = & 4 & 6x_{G_1} & +2x_{G_2} \\ x_2 & = & 2 & & +x_{G_2} \\ x_1 & = & 1 & -x_{G_1} & \\ \hline z & = & 11 & -\frac{221}{24}x_{G_1} & -3x_{G_2}. \end{array}$$

Also ist $x_1 = 1, x_2 = 2$ die maximale ganzzahlige Strategie.

([**1**, Beispiel 3.38]) □

KAPITEL 4

Netzwerkprobleme und die Transportaufgabe

Motivation: Es gibt M Fabriken, die für die Herstellung eines Produkts für N Empfänger benutzt werden. Das i-te Lager kann höchstens α_i Einheiten des Produkts liefern (Angebotbedingung), der j-te Empfänger benötigt mindestens β_j Einheiten (Nachfragebedingung). Der Transport vom i-ten Lager zum j-ten Empfänger kostet eine Logistikfirma c_{ij} Euro/Produkteinheit. Die Gesamtkosten $\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}x_{ij}$ sollen minimiert werden. Finde eine optimale Strategie, also die Quantität x_{ij} vom zu liefernden Produkt.

Formal:

$$\text{minimiere} \qquad \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}x_{ij}$$

unter den Beschränkungen

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \le \alpha_i \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, M \qquad \text{(Angebotbedingung)}$$

und

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} \ge \beta_j \qquad \text{für alle } j = 1, \dots, N \qquad \text{(Nachfragebedingung)}$$

über die Spalten bzw. Zeilen der $M \times N$-Matrix $X = (x_{ij})$, wobei $C = (c_{ij})$ eine $M \times N$-Matrix, $0 \le \alpha = (\alpha_j) \in \mathbb{R}^N$, $0 \le \beta = (\beta_i) \in \mathbb{R}^M$ ist.

Notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Problems: $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \ge \sum_{i=1}^{M} \beta_i$. Durch Einführung von Schlupfvariablen kann man annehmen, dass die Beschränkungen

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = \alpha_j \qquad \text{für alle } j = 1, \dots, N$$

und

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = \beta_i \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, M$$

lauten. Dann gilt notwendigerweise $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = \sum_{i=1}^{M} \beta_i =: R$.

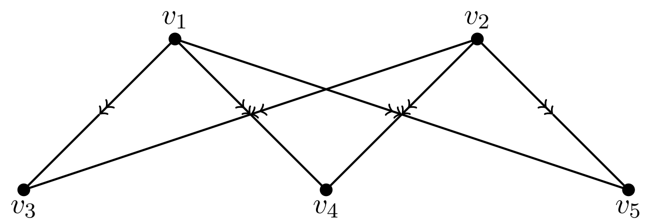
Äquivalente Transformation der obigen Aufgabe in eine übliche Minimierungsaufgabe.

Beispiel 4.1. Ein Lieferant mit $M = 2$ Lagern und $N = 3$ Supermärkte, Bedingungen

$$\alpha = \begin{pmatrix} 21 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

und Kostenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4,5 & 2,5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



[mit Gewichten: z.B. wegen Autobahnmaut, Zollgebühren, Dieselkosten, Länge der Strecke usw.] □

Im Allgemeinen:

$$\text{minimiere} \quad z = c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$Ax = b$$

(bis auf Einführung von Schlupfvariablen) und

$$x \geq 0$$

über

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1N} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{M1} \\ \vdots \\ x_{MN} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M \cdot N}, \quad \text{wobei } c = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1N} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{2N} \\ \vdots \\ c_{M1} \\ \vdots \\ c_{MN} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M \cdot N}, \quad b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_M \\ -\beta_1 \\ \vdots \\ -\beta_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M,$$

und die $(M+N) \times (M \cdot N)$-Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & & & & 0 & & \\ & & & 1 & \dots & 1 & & & \\ & 0 & & \vdots & & & & & \\ & & & & & & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Es gilt übrigens

$$\sum_{i=1}^{M+N} b_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - \sum_{i=1}^{M} \beta_i = 0.$$

Satz 4.2. *Die Minimierungsaufgabe für das Transportproblem hat immer eine optimale Lösung.*

Dies folgt aus dem Fundamentalsatz der linearen Optimierung: Die Aufgabe ist zulässig, denn durch

$$x_{ij} := \frac{\alpha_i \beta_j}{R}$$

wird eine zulässige Strategie definiert. Wiederum ist der zulässige Bereich beschränkt, denn notwendigerweise gilt $0 \leq x_{ij} \leq \min\{\alpha_i, \beta_j\}$.

Anmerkung 4.3. Eine Logistikfirma will das Geschäft des Lieferanten aus dem Beispiel 4.1 übernehmen. Er kann v_1, v_2 für die Übernahme der beiden Lager zahlen und kann w_1, w_2, w_3 als Gewinn für den Versand zu den drei Supermärkten planen. Durch die Lieferung vom i-ten Lager zu dem j-ten Supermarkt würde er also $w_j - v_i$ verdienen. Um Wettbewerber zu unterbieten will er

$$w_j - v_i \leq c_{ij}$$

erfüllen. Unter diesen Bedingungen beginnt er sein Geschäft und möchte nun seinen Gewinn maximieren, also $10w_1 + 12w_2 + 15w_3 - 21v_1 - 16v_2$. Er will selbstverständlich die Beschränkungen

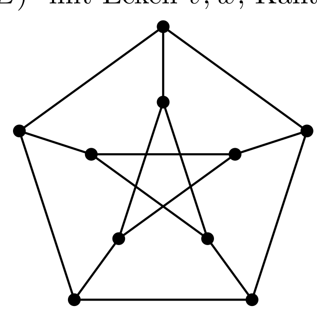
$$w_1 - v_1 \leq 2,\ w_1 - v_2 \leq 1,\ w_2 - v_2 \leq 1,\ w_3 - v_1 \leq 2,5,\ w_3 - v_2 \leq 3$$

gleichzeitig erfüllen. Diese ist die duale Aufgabe zum Transportproblem.
([**6**, §2.2.3 und S. 63])

Statt durch den Simplexalgorithmus kann man diese Aufgabe mittels des Netzwerk-Simplexalgorithmus lösen.

Es muss aber nicht sein, dass jedes Lager jeden Empfänger beliefern kann (z.B. aus legalen Gründen). Andererseits kann es auch Zwischenlager geben. Es kann zusätzlich noch sein, dass die Versandkosten von der i-ten Fabrik zum j-ten Empfänger nicht optimal sind: Im Beispiel 4.1 wäre der Versand von der 1. Fabrik zum 2. Empfänger günstiger, wenn man das Produkt erst zum 1. Empfänger verschickt (2 EUR), dann zurück zur 2. Fabrik (1 EUR) und schließlich zum 2. Empfänger (1 EUR): insgesamt würde man 4 EUR ausgeben, also weniger als 4,5 EUR, was ein direkter Versand kostet. Es lohnt sich also, einen Netzwerkformalismus einzuführen.

[Definition eines Graphen $G = (V, E)$[1] mit Ecken v, w, Kanten $e \equiv (v, w)$]



Eine gerichtete Kante $\overrightarrow{e}$ ist eine Kante (v, w) von G, welche mit einer Richtung versehen wird: entweder von v nach w oder von w nach v, $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{(v, w)}$ bzw. $\overleftarrow{e} = \overleftarrow{(v, w)} = \overrightarrow{(w, v)}$. v heißt Startecke von $\overrightarrow{(v, w)}$, w heißt Endecke von $\overrightarrow{(v, w)}$.

Ein gerichteter Graph $\overrightarrow{G}$ ist ein Graph, dessen Kanten alle gerichtet sind.

[1] Graphen werden immer als schlicht vorausgesetzt, also keine Schlingen und keine Mehrfachkanten: $E \subset \{(v, w) \in V \times V : v \neq w\}$.

Beispiel 4.4. Graph $\overrightarrow{G}$ mit V $\equiv$Menge der Mitglieder von StudiVZ, $(v, w) \in E$ falls Mitglieder v, w befreundet sind. $\square$

Beispiel 4.5. Graph $\overrightarrow{G}$ mit V $\equiv$Menge der 32 Nationalmannschaften, die bei der Fußball-WM 2006 gespielt haben und $(v, w) \in E$ genau dann, wenn v in der ersten Runde w geschlagen hat. $\square$

Ein Teilgraph von $G = (V, E)$ ist ein weiterer Graph $G' = (V', E')$, so dass $V' \subset V$ und $E' \subset E$.

Sei $G' = (V', E')$ ein Teilgraph von G und $e \in E'$. Dann ist $G' - e$ der Teilgraph mit Eckenmenge V' und Kantenmenge $E \setminus \{e\}$.

Sei $G' = (V', E')$ ein Teilgraph von G und $e = (v, w) \in E \setminus E'$. Dann ist $G' + e$ der Teilgraph mit Eckenmenge $V' \cup \{v, w\}$ und Kantenmenge $E \cup \{e\}$.

Die Struktur eines gerichteten Graphen wird durch die Inzidenzmatrix $\mathcal{I} = (\overrightarrow{\iota_{ij}})$ beschrieben, wobei

$$\overrightarrow{\iota_{ij}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \text{ Startecke von } e_j \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } v_i \text{ Endecke von } e_j \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und man bezeichnet $v \to e$ bzw. $e \to v$.

Anmerkung 4.6. Die Summe der Einträge jeder Spalte der Inzidenzmatrix ist 0. Genauer: Injeder Spalte kommt genau ein $+1$ und ein -1 vor. Jede $0-1$-Matrix mit dieser Eigenschaft ist Inzidenzmatrix eines Graphen.

Beispiel 4.7. Graph $\overrightarrow{G}$ mit $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $E := \{\overrightarrow{(n, n+1)} : n \in \{0, 1, 2, 3\}\}$. Seine Inzidenzmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Das Transportproblem kann also auch folgendermaßen formuliert werden:

$$\text{minimiere } c^T x$$

unter den Beschränkungen

$$Ax = b$$

(bis auf Einführung von Schlupfvariablen) und

$$x \geq 0$$

über $x \in \mathbb{R}^{MN}$, wobei $c \in \mathbb{R}^{MN}$, $b \in \mathbb{R}^{M+N}$ mit $\sum_{j=1}^{M+N} b_j = 0$ und A ist die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen ist. Der Vektor x entspricht der Transportstrategie entlang der Kanten dieses Graphen.

Stellt man eine Angebot- bzw. eine Nachfragebedingung an eine Ecke v, so heißt v eine *Quelle* bzw. eine *Senke*. Ein *Netzwerk* ist ein gerichteter Graph (V, E), der mit einer Menge V_q von Quellen und einer Menge V_s von Senken sowie mit einer Kostenfunktion $c : E \to [0, \infty)$ (deren Werte nicht von der Richtung einer Kante abhängen, also $c(\overrightarrow{e}) = c(\overleftarrow{e}) =: c(e)$) versehen ist.

Beispiel 4.8. Beispiel 4.1 als Netzwerk mit $V = \{\text{Fabrik1, Fabrik2, Empfänger1, Empfänger2, Empfänger3}\}$ und Inzidenzmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Die Fabriken sind die Quellen, die Empfänger sind die Senken.
Ein *Fluss* auf einem Netzwerk ist eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}_+$, so dass gilt

- ist $v \in V$ weder Quelle noch Senke, so ist $\sum_{e\to v} f(e) = \sum_{v\to e} f(e)$;
- ist $v \in V$ eine Quelle, so stimmt $\sum_{v\to e} f(e)$ mit der Angebotbedingung überein;
- ist $v \in V$ eine Senke, so stimmt $\sum_{e\to v} f(e)$ mit der Nachfragebedingung überein.

Satz 4.9. *Eine Strategie für das Transportproblem ist genau dann zulässig, wenn sie einen Fluss für das assoziierte Netzwerk bestimmt.*
([**2**, S. 293–294]*)*

Ein Pfad von $v \in V$ nach $w \in V$ ist eine Kantenfolge $(v, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_p, w)$. Ein Zyklus ist eine Kantenfolge der Form $(v, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_p, w), (w, v)$. Ein Graph heißt zusammenhängend, falls es zwischen je zwei Ecken v, w einen Pfad von v nach w gibt. Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph, der keine Zyklen enthält. [Beispiele]

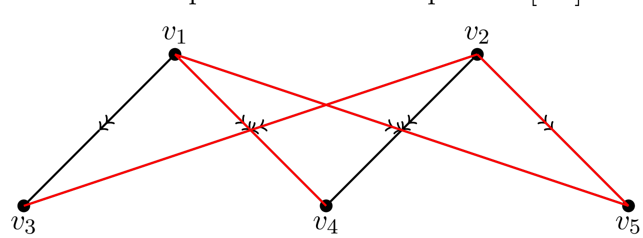
Satz 4.10. *Sei G ein Graph ohne Zyklen. Dann gibt es zwischen je zwei Ecken v, w höchstens einen Pfad von v nach w.*

Satz 4.11. *Sei G ein Graph mit m Ecken. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(a) G ist ein Baum.
(b) G ist zusammenhängend und hat $m - 1$ Kanten.
(c) G enthält keine Zyklen und hat $m - 1$ Kanten.

Ein Spannbaum T eines Graphen G ist ein Graph mit derselber Eckenmenge von G und einer Kantenmenge, die Teilmenge der Kantenmenge von G ist.

Beispiel 4.12. Ein Spannbaum des Graphen aus dem Beispiel 4.1 [rot].



□

Satz 4.13. *Jeder Graph hat einen Spannbaum. (*[**4**, Prop. 5.10]*)*

Ein Spannbaum kann gebildet werden, indem man rekursiv Kanten entlang Zyklen ausmustert.

Eine *zulässige Baumstrategie* des Transportproblems ist eine zulässige Strategie des Transportproblems, die mit einem Spannbaum T des Netzwerks assoziiert ist, d.h., so dass $x_{ij} = 0$ falls (v_i, v_j) keine Kante von T ist.

Ziel des Netzwerk-Simplexalgorithmus ist es, immer bessere zulässige Strategien zu finden, die mit Spannbäumen des Netzwerks assoziiert sind. Erst betrachtet man eine zulässige Strategie (samt ihres Spannbaums) und findet dabei heraus, wie hoch die fairen Kosten des Produkts nach dem Versand von v_i nach v_j sind. Dann versucht man einen neuen Graphen (keinen Baum!) zu finden, dessen Nutzung niedrigere Kosten verursachen würde. Schließlich löscht man eine Kante, welche die Kosten nicht senken kann, und fängt mit einer Strategie samt Spannbaum wieder an.

Der Netzwerk-Simplexalgorithmus. Betrachte einen Spannbaum T des Netzwerks und eine zugehörige zulässige Baumstrategie x.

(1) Bestimme $y \in \mathbb{R}^{M+N}$, so dass
$$y_h - y_k = c_{hk} \text{ für alle Kanten } (v_h, v_k) \in T.$$
(Dazu kann man $y_{M+N} = 0$ setzen, denn faire Preise sind nur bis auf eine additive Konstante bestimmt – es sind also nicht y_h, y_k relevant, sondern nur ihre Differenz $y_h - y_k$). Das zugehörige System besteht aus $(M+N)-1$ linearen Gleichungen.

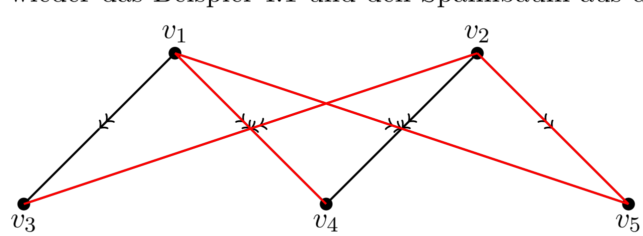
(2) Finde eine (sog. *einkommende*) Kante (v_i, v_j) des Netzwerks (aber nicht des Spannbaums), so dass
$$y_j - y_i > c_{ij}.$$
Der Algorithmus bricht ab, falls dies nicht möglich ist: Dann ist die zuletzt bestimmte Strategie bereits optimal. Gibt es mehrere solche Kanten, so nimm eine, bei der $y_j - y_i - c_{ij}$ maximal ist. Betrachte den Teilgraphen $T + (v_i, v_j)$, der einen Zyklus enthält, also kein Baum mehr ist.

(3) Maximiere $x_{ij} =: t > 0$ unter der Beschränkung, dass $\tilde{x}_{hk}$ für alle Kanten (v_h, v_k) des neu enstandenen Zyklus positiv sein müssen[2] Sei $x_{\ell m}$ eine Variable, deren Positivität die strengste Bedingung an $x_{ij} = t$ stellt und betrachte die (sog. *ausgehende*) Kante (v_ℓ, v_m).

(4) "Pivoting": Vertausche die Rollen der einkommenden Kante (v_i, v_j) und der ausgehenden Kante (v_ℓ, v_m), d.h., betrachte $T + (v_i, v_j) - (v_\ell, v_m)$.

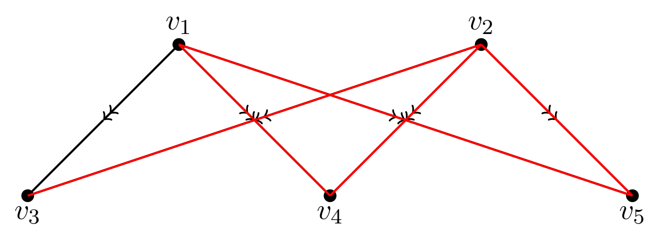
(5) Bestimme eine zulässige Baumstrategie x, die mit dem neuen Spannbaum assoziiert ist, und fange wieder bei (1) an.

Beispiel 4.14. Betrachte wieder das Beispiel 4.1 und den Spannbaum aus dem Beispiel 4.12, also

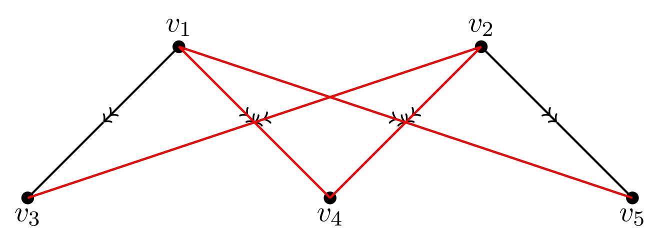


[2] Dabei wird $\tilde{x}_{hk}$ folgendermaßen definiert: Durchquere den Zyklus in der Richtung der einkommenden Kante und setze für alle weitere Kanten $\overrightarrow{(v_h, v_k)}$ aus dem Zyklus
$$\tilde{x}_{hk} = \begin{cases} x_{hk} + t & \text{falls } \overrightarrow{(v_h, v_k)} \text{ in der Durchlaufrichtung des Zyklus gerichtet ist,} \\ x_{hk} - t & \text{sonst.} \end{cases}$$

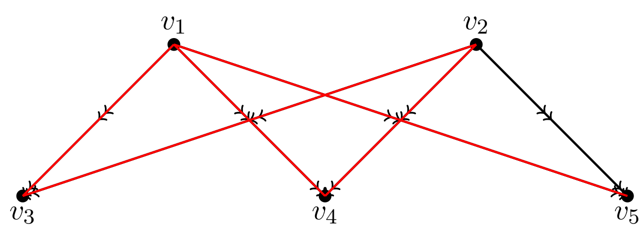
- Um eine zulässige Strategie zu erhalten, betrachte die Nachfragebedingung in v_3: Sie lautet $x_{13} + x_{23} = 10$. Da wir eine Baumstrategie suchen (und somit $x_{13} = 0$ sein sollte), bekommt man $x_{23} = 10$. Dadurch ist die Nachfragebedingung in v_3 bereits erfüllt. Die Angebotbedingung in v_2 fordert, dass $x_{23}+x_{24}+x_{25} = 16$ gilt. Da aber $x_{24} = 0$ sein soll, muss man $x_{25} = 16-10 = 6$ setzen. Die Nachfragebedingung in v_5 lautet $x_{15}+x_{25} = 15$ und somit soll $x_{15} = 15-6 = 9$ gelten. Schließlich folgt aus der Angebotbedingung in v_1, dass $x_{14}+x_{15} = 21$ und somit $x_{14} = 21-9 = 12$ sein soll. Dadurch ist auch die Nachfragebedingung in v_4 erfüllt. Also erhalten wir die zulässige Baumstrategie
$$x_{13} = 0, \quad x_{14} = 12, \quad x_{15} = 9, \quad x_{23} = 10, \quad x_{24} = 0, \quad x_{25} = 6.$$
- Löse nun das System
$$\begin{aligned} 2,5 = c_{15} &= y_5 - y_1 = -y_1, \\ 3 = c_{25} &= y_5 - y_2 = -y_2, \\ 4,5 = c_{14} &= y_4 - y_1, \\ 1 = c_{23} &= y_3 - y_2, \end{aligned}$$
und erhalte also
$$y_5 = 0, \qquad y_1 = -2,5, \qquad y_2 = -3, \qquad y_3 = -2, \qquad y_4 = 2.$$
- Um eine einkommende Kante zu bestimment gibt es nur zwei Möglichkeiten, denn nur zwei Kanten des Graphen gehören nicht zum Spannbaum: (v_1, v_3) und (v_2, v_4). Dabei gilt
$$y_3 - y_1 = 0,5 < c_{13} \qquad \text{und} \qquad y_4 - y_2 = 5 > c_{24}.$$
Die einkommende Kante ist also (v_2, v_4) und wir betrachten den Teilgraphen $T + (v_2, v_4)$.



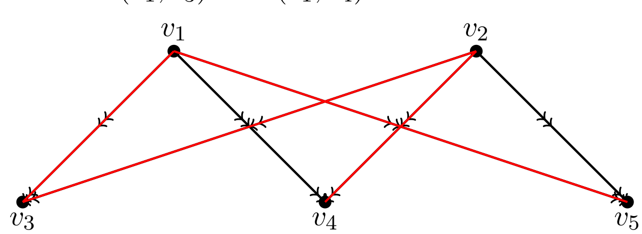
Dadurch ensteht ein Zyklus $\overrightarrow{(v_2, v_4)}, \overleftarrow{(v_4, v_1)}, \overrightarrow{(v_1, v_5)}, \overleftarrow{(v_5, v_2)}$. Setze
$$\tilde{x}_{24} = t, \qquad \tilde{x}_{14} = 12 - t, \qquad \tilde{x}_{15} = 9 + t, \qquad \tilde{x}_{25} = 6 - t.$$
Insbesondere soll $0 \leq \tilde{x}_{25} = 6 - t$ gelten, also ist (v_2, v_5) die ausgehende Kante. Setze also $t = 6$ und vertausche die Rollen von (v_2, v_4) und (v_2, v_5).



- Um eine neue zulässige Baumstrategie zu erhalten, setze noch mal $x_{13} = 0$, so dass $x_{23} = 10$. Die Angebotbedingung in v_2 fordert, dass $x_{23} + x_{24} + x_{25} = 16$ gilt. Da aber $x_{25} = 0$ sein soll, muss man $x_{24} = 16 - 10 = 6$ setzen. Die Nachfragebedingung in v_4 lautet $x_{14} + x_{24} = 12$ und somit soll $x_{14} = 12 - 6 = 6$ gelten. Schließlich folgt aus der Angebotbedingung in v_1, dass $x_{14} + x_{15} = 21$ und somit soll $x_{15} = 21 - 6 = 15$ sein. Dadurch ist auch die Nachfragebedingung in v_4 erfüllt. Also erhalten wir die zulässige Baumstrategie
$$x_{13} = 0, \quad x_{14} = 6, \quad x_{15} = 15, \quad x_{23} = 10, \quad x_{24} = 6, \quad x_{25} = 0.$$
- Löse nun das System
$$\begin{aligned} 2,5 = c_{15} &= y_5 - y_1 = -y_1, \\ 4,5 = c_{14} &= y_4 - y_1, \\ 1 = c_{24} &= y_4 - y_2, \\ 1 = c_{23} &= y_3 - y_2, \end{aligned}$$
und erhalte
$$y_5 = 0, \qquad y_1 = -2,5, \qquad y_4 = 2, \qquad y_2 = 1, \qquad y_3 = 2.$$
- Um eine einkommende Kante zu bestimmen gibt es wieder nur zwei Möglichkeiten: (v_1, v_3) und (v_2, v_5). Dabei gilt
$$y_3 - y_1 = 4,5 > c_{13} \qquad \text{und} \qquad y_5 - y_2 = 1 = c_{24}.$$
Die einkommende Kante ist also (v_1, v_3) und wir betrachten den Teilgraphen $T + (v_1, v_3)$.



Dadurch ensteht ein Zyklus $\overrightarrow{(v_2, v_4)}, \overleftarrow{(v_4, v_1)}, \overrightarrow{(v_1, v_3)}, \overleftarrow{(v_3, v_2)}$. Setze
$$\tilde{x}_{13} = t, \qquad \tilde{x}_{23} = 10 - t, \qquad \tilde{x}_{24} = 6 + t, \qquad \tilde{x}_{14} = 6 - t.$$
Insbesondere soll $0 \leq \tilde{x}_{14} = 6 - t$ sein, also ist (v_1, v_4) die ausgehende Kante. Setze also $t = 6$ und vertausche die Rollen von (v_1, v_3) und (v_1, v_4).



- Um eine neue zulässige Baumstrategie zu erhalten, setze noch mal $x_{25} = 0$, so dass (aus der Nachfragebedingung in v_5) folgt $x_{15} = 15$. Die Angebotbedingung in v_1 fordert, dass $x_{13} + x_{14} + x_{15} = 21$. Da aber $x_{14} = 0$ sein soll, muss man $x_{13} = 21 - 15 = 6$ setzen. Die Nachfragebedingung in v_3 lautet $x_{13} + x_{23} = 10$ und somit soll $x_{23} = 10 - 6 = 4$ gelten. Schließlich folgt aus der

Angebotbedingung in v_2, dass $x_{23} + x_{24} = 16$ und somit soll $x_{24} = 16 - 4 = 12$ sein. Dadurch ist auch die Nachfragebedingung in v_4 erfüllt. Also erhalten wir die zulässige Baumstrategie

$$x_{13} = 6, \quad x_{14} = 0, \quad x_{15} = 15, \quad x_{23} = 4, \quad x_{24} = 12, \quad x_{25} = 0.$$

- Löse nun das System

$$\begin{aligned} 2,5 = c_{15} &= y_5 - y_1 = -y_1, \\ 2 = c_{13} &= y_3 - y_1, \\ 1 = c_{23} &= y_3 - y_2, \\ 1 = c_{24} &= y_4 - y_2, \end{aligned}$$

und erhalte

$$y_5 = 0, \qquad y_1 = -2,5, \qquad y_3 = -0,5, \qquad y_2 = -1,5, \qquad y_4 = -0,5.$$

- Die möglichen einkommenden Kanten wären nun (v_1, v_4) und (v_2, v_5). Dabei gilt aber

$$y_4 - y_1 = 2 < c_{14} \qquad \text{und} \qquad y_5 - y_2 = 1,5 < c_{25},$$

so dass der Algorithmus abbricht. Die Baumstrategie

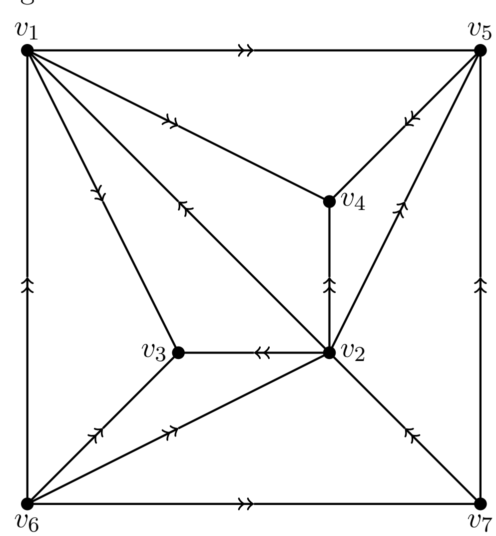
$$x_{13} = 6, \quad x_{14} = 0, \quad x_{15} = 15, \quad x_{23} = 4, \quad x_{24} = 12, \quad x_{25} = 0$$

ist also optimal, was man vielleicht hätte bereits erwarten können.

[**2**, S. 296–299]. □

Anmerkung 4.15. Unsere optimale Baumstrategie stellt einen Fluss auf dem Netzwerk dar. Ist v_i bei einer optimalen Baumstrategie durch einen *gerichteten* Pfad (also durch einen Pfad von gerichteten Kanten) mit v_j verbunden, so betragen die optimalen Transportkosten $y_j - y_i$. Diese Beobachtung gilt i.A. aber nicht (also nicht, wenn man bei der Baumstrategie gegen Kantenrichtung transportieren sollte), denn – nach Definition von Fluss – würden manche Transportkosten negativ bewertet, also *abgezogen*, was i.A. unrealistisch ist (z.B. bei Autobahntransporten), doch gelegentlich plausibel sein könnte, z.B. wenn man sich mit physikalischen Potentialen – wie Schwerkraft, elektrischen Flüssen usw. – befasst.

Beispiel 4.16. Betrachte das folgende Netzwerk:



mit folgendem Kostenvektor

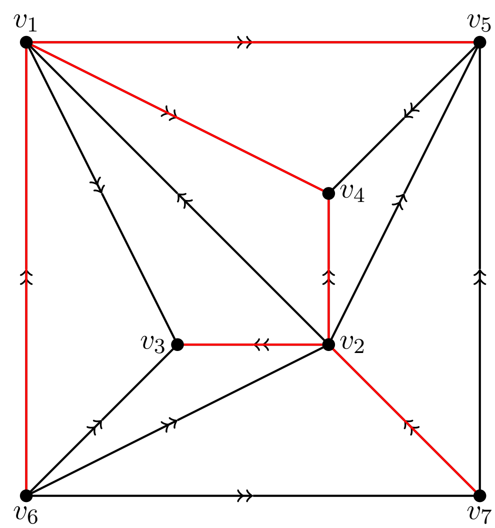
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{c} & = & (c_{13}\quad c_{14}\quad c_{15}\quad c_{21}\quad c_{23}\quad c_{24}\quad c_{25}\quad c_{54}\quad c_{61}\quad c_{62}\quad c_{63}\quad c_{67}\quad c_{72}\quad c_{75}) \\ & = & (53\quad 18\quad 29\quad 8\quad 60\quad 28\quad 37\quad 5\quad 44\quad 38\quad 98\quad 14\quad 23\quad 59) \end{array}$$

und Beschränkungen, die durch den Vektor

$$b = \begin{pmatrix}0 & 0 & 6 & 10 & 8 & -9 & -15\end{pmatrix}^T$$

gegeben werden.

- Ein erster möglicher Spannbaum ist



Nur die Kanten, die im Graphen vorhanden sind, können zur Bestimmung einer Strategie betrachtet werden.

- Eine mögliche Baumstrategie ist durch

$$\begin{array}{llllll} x_{67} = 0, & x_{75} = 0, & x_{63} = 0, & x_{21} = 0, & x_{13} = 0, & x_{54} = 0, \\ x_{72} = 15, & x_{23} = 6, & x_{24} = 9, & x_{61} = 9, & x_{15} = 8, & x_{14} = 1 \end{array}$$

gegeben.

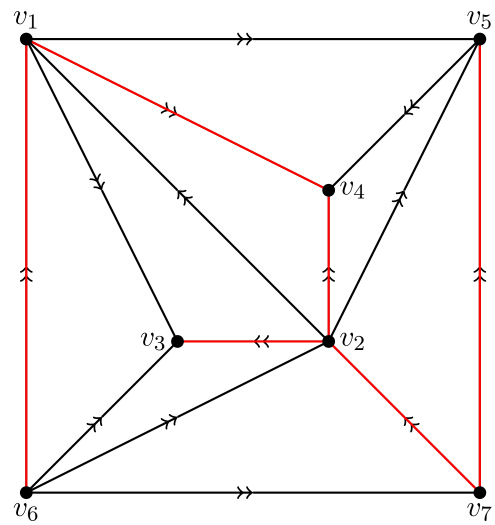
- Setze $y_7 = 0$ und löse das System

$$\begin{array}{rcl} 23 = c_{72} & = & y_2 - y_7 = y_2, \\ 60 = c_{23} & = & y_3 - y_2, \\ 28 = c_{24} & = & y_4 - y_2, \\ 18 = c_{14} & = & y_4 - y_1, \\ 29 = c_{15} & = & y_5 - y_1, \\ 44 = c_{61} & = & y_1 - y_6, \end{array}$$

was

$$y_2 = 23, \quad y_3 = 83, \quad y_4 = 51, \quad y_1 = 33, \quad y_5 = 62, \quad y_6 = -11, \quad y_7 = 0$$

liefert. Die einkommende Kante ist (v_5, v_7), die ausgehende Kante ist (v_1, v_5).



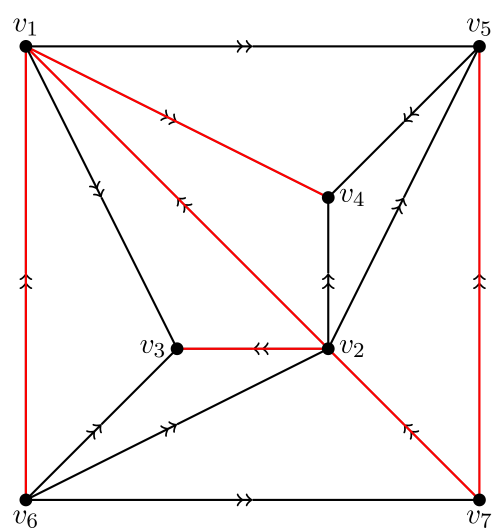
- Setze $y_7 = 0$ und löse das System

$$\begin{aligned} 59 = c_{75} &= y_5 - y_7 = y_5, \\ 23 = c_{72} &= y_2 - y_7 = y_2, \\ 60 = c_{23} &= y_3 - y_2, \\ 28 = c_{24} &= y_4 - y_2, \\ 18 = c_{14} &= y_4 - y_1, \\ 44 = c_{61} &= y_1 - y_6, \end{aligned}$$

  was

$$y_5 = 59, \quad y_2 = 23, \quad y_3 = 83, \quad y_4 = 51, \quad y_1 = 33, \quad y_6 = -11, \quad y_7 = 0$$

  liefert. Die einkommende Kante ist (v_1, v_2), die ausgehende Kante ist (v_2, v_4).



Setze $y_7 = 0$ und löse das System

$$\begin{aligned} 59 = c_{75} &= y_5 - y_7 = y_5, \\ 23 = c_{72} &= y_2 - y_7 = y_2, \\ 60 = c_{23} &= y_3 - y_2, \\ 8 = c_{21} &= y_1 - y_2, \\ 18 = c_{14} &= y_4 - y_1, \\ 44 = c_{61} &= y_1 - y_6, \end{aligned}$$

was

$$y_5 = 59, \quad y_2 = 23, \quad y_3 = 83, \quad y_1 = 31, \quad y_4 = 49, \quad y_6 = -13$$

liefert. Der Algorithmus bricht ab, denn $y_j - y_i \le c_{ij}$ für alle i, j. □

([**2**, S. 296–303])

Satz 4.17. *Falls der Vektor b der Bedingungen aus ganzen Zahlen besteht, so hat die Minimiersungsaufgabe für das Transportproblem eine ganzzahlige optimale Lösung.*

Erkennt man also eine ganzzahlige Minimierungsaufgabe als Netzwerktransportaufgabe, so kann man den Netzwerk-Simplexalgorithmus anwenden und umsonst Dank des obigen Satzes eine ganzzahlige Strategie erhalten – und sich die Anwendung des Gomory-Algorithmus ersparen.

Als Anwendung des Netzwerk-Simplexalgorithmus betrachten wir das folgende Problem: Sei eine bestimmte Ecke $w \in V$ ("Wurzel") eines ungerichteten Graphen gegeben, dessen Kanten mit einer Längefunktion versehen werden. Man möchte wissen, welches der kürzeste Pfad zwischen einer weiteren Ecke v und w ist. Ist der Graph ein Baum, dann gibt es genau einen Pfad zwischen w und jeder weiteren Ecke, der auch optimal kurz ist. Enthält der Graph Zyklen, so kann man diese Fragestellung als Transportaufgabe formulieren. Richte alle Kanten rekursiv, indem man erst alle in w ankommenden Kanten $(v_i^{(1)}, w)$ in Richtung w richtet, dann alle Kanten der Form $(v_j^{(2)}, v_i^{(1)})$ nach $v_i^{(1)}$, usw. Stellt man eine Angebotbedingung $= 1$ in jeder der $|V| - 1$ Ecken $v \neq w$ und eine Nachfragebedingung $= |V| - 1$ in w, so hat man eine Transportaufgabe. Löst man sie mit dem Netzwerk-Simplexalgorithmus, so erhält man einen kürzesten Pfad, indem man einer optimaler Baumstrategie x folgt. Die gesamte Länge ist dann durch y gegeben $(y_w - y_v)$ – *falls auch negative Länge betrachtet werden.* Außerdem liefert die Lösung eine gesamte Strategie für alle Ecken, die aber für einzelne Ecken unterboten werden könnte.

Der Dijkstra-Algorithmus für Netzwerke. Betrachte ein Netzwerk mit Längefunktion (=Kostenfunktion) C und $U \subset V$, $U \neq V$. Man will die kürzesten Pfade von U (genauer: von irgendeiner Ecke, die U angehört) zu allen Ecken aus $V \setminus U$ bestimmen.

Führe eine Menge $R \subset V$, eine Abstandsfunktion $d : V \to [0, \infty]$ (wobei $d(v) = \infty$ heißt, dass es keinen gerichteten Pfad von v nach $V \setminus U$ gibt) und eine Pfadfunktion $p : V \to E$ ein.

(0) Setze $R = \emptyset$, $c_{ij} = \infty$ falls keine gerichtete Kante von v_i nach v_j existiert und

$$d(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v \in U, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

(1) Ist $d(v) = \infty$ für alle $v \notin R$, so bricht der Algorithmus ab. Sonst finde eine Ecke $v_{i_0} \notin R$, so dass $d(v_{i_0}) \le d(w)$ für alle $w \notin R$ gilt und füge v_{i_0} zu R hinzu.

(2) Für jede Kante $(v_{i_0}, v_j) \in E$ mit $v_j \notin R$ und $c_{i_0 j} < d(v_j) - d(v_{i_0})$ ersetze $d(v_j)$ durch $d(v_{i_0}) + c_{i_0 j}$. Setze $p(v_j) := (v_{i_0}, v_j)$, dann fange wieder bei (1) an.

Der Dijkstra-Algorithmus liefert eine Lösung in der folgenden Form: $d(v)$ is die Länge des kürzesten Pfades von irgendeiner Ecke aus U nach v. Existiert kein solcher Pfad, so ist $d(v) = \infty$; sonst liefert $p(v)$ den gesuchten Pfad.

Beispiel 4.18. Betrachte das Netzwerk aus dem Beispiel 4.1 und $U = \{v_2, v_3\}$.

- Setze $R = \emptyset$ und $d(v_1) = d(v_4) = d(v_5) = \infty$, $d(v_2) = d(v_3) = 0$.
- Es ist $d(v_2) = 0 \leq d(v)$ für alle $v \notin R = \emptyset$. Nun wird $R = \{v_2\}$.
- Betrachte die Kanten $(v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5)$. Es gilt

$$d(v_2) + c_{23} = 1 > 0 = d(v_3), \quad d(v_2) + c_{24} = 1 < \infty = d(v_4), \quad d(v_2) + c_{25} = 3 < \infty = d(v_5),$$

  ersetze also $d(v_4) = \infty$ bzw. $d(v_5) = \infty$ durch

$$d(v_4) = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad d(v_5) = 3.$$

  Setze auch $p(v_4) = (v_2, v_4)$ und $p(v_5) = (v_2, v_5)$.
- Es ist $d(v_3) = 0 \leq d(v)$ für alle $v \notin R = \{v_2\}$. Nun wird $R = \{v_2, v_3\}$.
- Es gilt

$$d(v_3) + c_{31} = \infty = d(v_1),$$

  ersetze also nichts.
- Es ist $d(v_4) = 1 \leq d(v)$ für alle $v \notin R = \{v_2, v_3\}$. Nun wird $R = \{v_2, v_3, v_4\}$.
- Es gilt

$$d(v_4) + c_{41} = \infty \not< 2 = d(v_1).$$

  Ersetze also nichts.
- Es ist $d(v_1) = 2 \leq d(v)$ für alle $v \notin R = \{v_2, v_3, v_4\}$. Nun wird $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
- Es gilt

$$d(v_5) + c_{15} = 3 + 2 \not< 2 = d(v_1).$$

  Ersetze also nichts.
- Es ist $d(v_5) = \infty$ für alle $v \notin R = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Der Algorithmus bricht ab.

Also hat man insgesamt erhalten, dass

$$d(v_1) = \infty, \qquad d(v_2) = 0, \qquad d(v_3) = 0, \qquad d(v_4) = 1, \qquad d(v_5) = 3,$$

welche die kürzesten Pfade vermöge der Kanten

$$p(v_4) = (v_2, v_4), \qquad p(v_5) = (v_2, v_5)$$

liefern. Die Ecke v_1 kann weder von v_2 noch von v_3 erreicht werden, ohne die Richtung der Kanten zu verletzen. □

Der Dijkstra-Algorithmus für ungerichtete Graphen. Betrachte ein Netzwerk mit Längefunktion (=Kostenfunktion) C und $U \subset V$, $U \neq V$. Man will die kürzesten Pfade von U (genauer: von irgendeiner Ecke, die U angehört) zu allen Ecken aus $V \setminus U$ bestimmen, unabhängig von den Kantenrichtungen.

Führe eine Menge $R \subset V$, eine Abstandsfunktion $d : V \to [0, \infty]$ (wobei $d(v) = \infty$ heißt, dass es keinen gerichteten Pfad von v nach $V \setminus U$ gibt) und eine Pfadfunktion $p : V \to E$ ein.

(0) Setze $R = \emptyset$, $c_{ij} = c_{ji}$ für alle Kanten $(v_i, v_j) \in E$ und

$$d(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v \in U, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

(1) Ist $d(v) = \infty$ für alle $v \notin R$, so bricht der Algorithmus ab. Sonst finde eine Ecke $v_{i_0} \notin R$, so dass $d(v_{i_0}) \leq d(w)$ für alle $w \notin R$ gilt und füge v_{i_0} zu R hinzu.

(2) Für jede Kante $(v_{i_0}, v_j) \in E$ mit $v_j \notin R$ und $c_{i_0 j} < d(v_j) - d(v_{i_0})$ ersetze $d(v_j)$ durch $d(v_{i_0}) + c_{i_0 j}$. Setze $p(v_j) := (v_{i_0}, v_j)$, dann fange wieder bei (1) an.

Beispiel 4.19. Betrachte den Graphen aus dem Beispiel 4.1 und $U = \{v_4, v_6\}$ aber richte alle Kanten um. Setze $c_{ij} = \infty$ falls c_{ij} in der Kostenmatrix aus dem Beispiel 4.1 nicht vorkommt.

- Setze $R = \emptyset$ und $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_5) = d(v_7) = d(v_3) = \infty$, $d(v_4) = d(v_6) = 0$.
- Es ist $d(v_4) = 0 \leq d(v)$ für alle $v \notin R = \emptyset$. Nun wird $R = \{v_4\}$.
- Betrachte die Kanten $(v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_4, v_5)$. Es gilt
$$d(v_4) + c_{41} = \infty = d(v_1), \quad d(v_4) + c_{42} = \infty = d(v_2), \quad d(v_4) + c_{45} = \infty = d(v_5),$$
ersetze also nichts.
- Es ist $d(v_6) = 0 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = \{v_4, v_6\}$.
- Betrachte die Kanten $(v_1, v_6), (v_2, v_6), (v_3, v_6), (v_6, v_7)$. Es gilt
$$d(v_6) + c_{61} = 44 < \infty = d(v_1), \quad d(v_6) + c_{62} = 38 < \infty = d(v_2)$$
und
$$d(v_6) + c_{63} = 98 < \infty = d(v_3), \quad d(v_6) + c_{67} = 14 < \infty = d(v_7),$$
ersetze also $d(v_1) = \infty$, $d(v_2) = \infty$, $d(v_3) = \infty$, $d(v_7) = \infty$ durch
$$d(v_1) = 44, \qquad d(v_2) = 38, \qquad d(v_3) = 98 \qquad \text{bzw.} \qquad d(v_7) = 14.$$
Setze auch $p(v_1) = (v_1, v_6)$, $p(v_2) = (v_2, v_6)$, $p(v_3) = (v_3, v_6)$, $p(v_7) = (v_6, v_7)$.
- Es ist $d(v_7) = 14 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = \{v_4, v_6, v_7\}$.
- Betrachte die Kanten $(v_2, v_7), (v_5, v_7)$. Es gilt
$$d(v_7) + c_{72} = 37 \not< 28 = d(v_2), \qquad d(v_7) + c_{75} = 73 < \infty = d(v_5).$$
Ersetze also $d(v_5) = \infty$ durch
$$d(v_5) = 73.$$
Setze auch $p(v_5) = (v_5, v_7)$.
- Es ist $d(v_2) = 38 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = \{v_2, v_4, v_6, v_7\}$.
- Betrachte die Kanten $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_5)$. Es gilt
$$d(v_2) + c_{21} = 46 \not< 44 = d(v_1), \qquad d(v_2) + c_{23} = 98 = d(v_3), \qquad d(v_2) + c_{25} = 75 \not< 73 = d(v_5).$$
Ersetze also nichts.
- Es ist $d(v_1) = 44 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = \{v_1, v_2, v_4, v_6, v_7\}$.
- Betrachte die Kanten $(v_1, v_3), (v_1, v_5)$. Es gilt
$$d(v_1) + c_{13} = 97 < 98 = d(v_3), \qquad d(v_1) + c_{15} = 73 = d(v_5).$$
Ersetze also $d(v_3) = 98$ durch
$$d(v_3) = 97$$
und setze $p(v_3) = (v_1, v_3)$.
- Es ist $d(v_5) = 73 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7\}$.

- Die Kante (v_3, v_5) existiert nicht. Ersetze also nichts.
- Es ist $d(v_3) = 3 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = V$.

Also hat man insgesamt erhalten, dass

$$d(v_1) = 44, \qquad d(v_2) = 38, \qquad d(v_3) = 97, \qquad d(v_4) = 0$$

sowie

$$d(v_5) = 73, \qquad d(v_6) = 0, \qquad d(v_7) = 14.$$

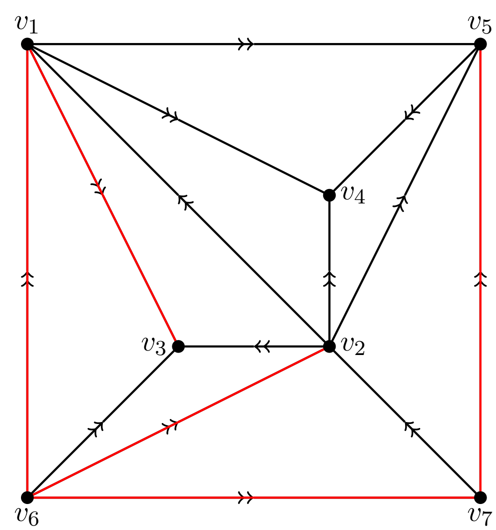
Die kürzesten Wege werden durch die Werte

$$p(v_1) = (v_1, v_6), \qquad p(v_2) = (v_2, v_6), \qquad p(v_3) = (v_1, v_3)$$

und

$$p(v_5) = (v_5, v_7), \qquad p(v_7) = (v_6, v_7)$$

gegeben.



□

Beispiel 4.20. Betrachte den Graphen aus dem Beispiel 4.1 und $U = \{v_4, v_6\}$. Setze $c_{ij} = c_{ji}$ für alle Kanten $(v_i, v_j) \in E$.

- Setze $R = \emptyset$ und $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_5) = d(v_7) = d(v_3) = \infty$, $d(v_4) = d(v_6) = 0$.
- Es ist $d(v_4) = 0 \leq d(v)$ für alle $v \notin R = \emptyset$. Nun wird $R = \{v_4\}$.
- Betrachte die Kanten $(v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_4, v_5)$. Es gilt

$$d(v_4) + c_{14} = 18 < \infty = d(v_1), \quad d(v_4) + c_{24} = 28 < \infty = d(v_2), \quad d(v_4) + c_{45} = 5 < \infty = d(v_5),$$

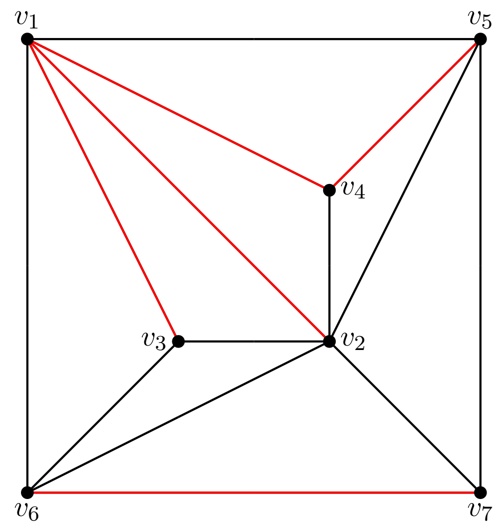
  ersetze also $d(v_1) = \infty$ bzw. $d(v_2) = \infty$, $d(v_5) = \infty$ durch

$$d(v_1) = 18 \qquad \text{bzw.} \qquad d(v_2) = 28, \qquad d(v_5) = 5.$$

  Setze auch $p(v_1) = (v_1, v_4)$, $p(v_5) = (v_4, v_5)$, $p(v_2) = (v_2, v_4)$.
- Es ist $d(v_6) = 0 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = \{v_4, v_6\}$.

- Betrachte die Kanten $(v_1, v_6), (v_2, v_6), (v_3, v_6), (v_6, v_7)$. Es gilt
$$d(v_6) + c_{16} = 44 \not< 18 = d(v_1), \quad d(v_6) + c_{26} = 38 \not< 28 = d(v_2)$$
und
$$d(v_6) + c_{36} = 98 < \infty = d(v_3), \quad d(v_6) + c_{67} = 14 < \infty = d(v_7),$$
ersetze also $d(v_3) = \infty$, $d(v_7) = \infty$ durch
$$d(v_3) = 98 \qquad \text{bzw.} \qquad d(v_7) = 14.$$
Setze auch $p(v_3) = (v_3, v_6)$, $p(v_7) = (v_6, v_7)$.
- Es ist $d(v_5) = 5 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = \{v_4, v_5, v_6\}$.
- Betrachte die Kanten $(v_1, v_5), (v_2, v_5), (v_5, v_7)$. Es gilt
$$d(v_5) + c_{15} = 34 \not< 18 = d(v_1), \qquad d(v_5) + c_{25} = 42 \not< 28 = d(v_2), \qquad d(v_5) + c_{75} = 64 \not< 14 = d(v_7).$$
Ersetze also nichts.
- Es ist $d(v_7) = 14 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$.
- Betrachte die Kante (v_2, v_7). Es gilt
$$d(v_7) + c_{27} = 37 \not< 28 = d(v_2).$$
Ersetze also nichts.
- Es ist $d(v_1) = 18 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = \{v_1, v_4, v_5, v_6, v_7\}$.
- Betrachte die Kanten $(v_1, v_2), (v_1, v_3)$. Es gilt
$$d(v_1) + c_{21} = 26 < 28 = d(v_2), \qquad d(v_1) + c_{13} = 71 < 98 = d(v_3),$$
ersetze also $d(v_2) = 28$, $d(v_3) = 98$ durch
$$d(v_2) = 26 \qquad \text{bzw.} \qquad d(v_3) = 71.$$
Setze auch $p(v_2) = (v_1, v_2)$, $p(v_3) = (v_1, v_3)$.
- Es ist $d(v_2) = 28 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7\}$.
- Betrachte die Kante (v_2, v_3). Es gilt
$$d(v_2) + c_{23} = 88 \not< 71 = d(v_3).$$
Ersetze also nichts.
- Es ist $d(v_3) = 3 \leq d(v)$ für alle $v \notin R$. Nun wird $R = V$.

Also hat man insgesamt erhalten, dass
$$d(v_1) = 18, \qquad d(v_2) = 26, \qquad d(v_3) = 71, \qquad d(v_4) = 0$$
sowie
$$d(v_5) = 5, \qquad d(v_6) = 0, \qquad d(v_7) = 14.$$
Die kürzesten Pfade sind durch die Werte
$$p(v_1) = (v_1, v_4), \qquad p(v_2) = (v_1, v_2), \qquad p(v_3) = (v_1, v_3)$$
und
$$p(v_5) = (v_4, v_5), \qquad p(v_7) = (v_6, v_7)$$
gegeben.



$\square$

Anmerkung 4.21. Wie man sieht spielen bei der Durchführung dieses letzten Algoritmus die Kantenrichtungen keine Rolle.

KAPITEL 5

Spieltheorie

Ziel: Untersuchung des rationalen Verhaltens mehrerer Partien bei einem “Spiel” – z.B. bei Geschäftsführung, Kommunikationstrategie, Brett- oder Kartenspielen, Krieg...

Beispiel 5.1. Bei dem Spiel strecken beide Spieler ihre rechte Hand gleichzeitig aus und zeigen einen bis fünf Finger an. Im selben Moment ruft jeder Spieler entweder “gerade” oder “ungerade”. Dabei versuchen sie die Summe der Zahlen zu erraten, die sie mit den Fingern anzeigen. Rät genau eine/r richtig, so bekommt er/sie einen Punkt, sonst bekommen beide keine Punkte. Gewonnen hat, wer als erste/r fünf Punkte bekommen hat. □

Beispiel 5.2. Vor jedem Autorennen sollen sich zwei Teams für den Einsatz eines einzigen Modells entscheiden. Das erste Team hat drei Modelle zur Verfügung, das zweite Team nur zwei. Das Modell Nr.1 des ersten Teams hat eine Wahrscheinlichkeit von 60%, das Modell Nr.1 des zweiten Teams zu schlagen, jedoch eine Wahrscheinlichkeit von nur 40%, das Modell Nr.2 zu schlagen. Das Modell Nr.2 des ersten Teams hat eine Wahrscheinlichkeit von 70% (bzw. 30%), das Modell Nr.1 (bzw. Nr.2) des zweiten Teams zu schlagen. Das Modell Nr.2 des ersten Teams hat eine Wahrscheinlichkeit von 15% (bzw. 55%), das Modell Nr.1 (bzw. Nr.2) des zweiten Teams zu schlagen. Welches Modell soll also vom ersten Team eingesetzt werden? □

Solche “Spiele” können formal durch die Spieltheorie beschrieben werden.

Beispiel 5.3. Beispiel 5.1

	G+1	G+2	G+3	G+4	G+5	U+1	U+2	U+3	U+4	U+5
G+1	0	0	0	0	0	+1	-1	+1	-1	+1
G+2	0	0	0	0	0	-1	+1	-1	+1	-1
G+3	0	0	0	0	0	+1	-1	+1	-1	+1
G+4	0	0	0	0	0	-1	+1	-1	+1	-1
G+5	0	0	0	0	0	+1	-1	+1	-1	+1
U+1	-1	+1	-1	+1	-1	0	0	0	0	0
U+2	+1	-1	+1	-1	+1	0	0	0	0	0
U+3	-1	+1	-1	+1	-1	0	0	0	0	0
U+4	+1	-1	+1	-1	+1	0	0	0	0	0
U+5	-1	+1	-1	+1	-1	0	0	0	0	0

□

Beispiel 5.4. Beispiel 5.2

	Mod1	Mod2
Mod1	60	40
Mod2	70	30
Mod3	15	55

□

Beispiel 5.5. “Schere, Stein, Papier” kann man so auffassen:

	Sch.	St.	Pap.
Sch.	0	-1	+1
St.	+1	0	-1
Pap.	-1	+1	0

Seine Erweiterung durch Brunnen wird dagegen folgendermaßen aufgefasst:

	Sch.	St.	Pap.	Br.
Sch.	0	-1	+1	-1
St.	+1	0	-1	-1
Pap.	-1	+1	0	+1
Br.	+1	+1	-1	0

□

Gegeben sei eine $m \times n$-Matrix A, das *Zweipersonenspiel S_A mit Auszahlungsmatrix A* ist das Spiel, das folgendermaßen gespielt wird: jede Zeile entspricht einer Strategie des 1. Spielers, jede Spalte einer Strategie des 2. Spielers. Wählt der 1. Spieler die Zeile i und der 2. Spieler die Spalte j, so wird dem 1. Spieler ein Betrag a_{ij} ausgezahlt.

Ähnlich kann man (anhand der Spielregeln) die Auszahlungsmatrix B für den 2. Spieler erstellen. Ist $a_{ij} = -b_{ji}$, so spricht man von einem *Nullsummenspiel*.

Im Allgemeinen spricht man von einem *Matrixspiel*, wenn ein Spiel mit zwei Spielern betrachtet wird, so dass die beiden Spieler *gleichzeitig* genau eine unter jeweils endlich vielen Strategien wählen dürfen, so dass die beiden ausgewälten Strategien vollkommen die Auszahlung bestimmen. Insbesondere sollen die beiden Spieler nicht zusammen eine optimale gemeinsame Strategie entwickeln können (“nichtkooperatives Spiel”).

Beispiel 5.6. In den Beispielen 5.1 und 5.5 handelt es sich um Zweipersonen-Nullsummenspiele. Beim Beispiel 5.2 handelt es sich jedoch um ein Zweipersonen-Nichtnullsummenspiel, denn $b_{ji} = 100 - a_{ij}$. Trotzdem kann man daraus ein Zweipersonen-Nullsummenspiel mit Auszahlungsmatrix $\tilde{A} := A - 50$ machen, d.h., wir ziehen 50 von jedem Eintrag der Auszahlungsmatrix A ab.

	Mod1	Mod2
Mod1	+10	-10
Mod2	+20	-20
Mod3	-35	+5

In diesem Fall ist die (modifizierte) Auszahlungsmatrix für den 2. Spieler

	Mod1	Mod2	Mod3
Mod1	-10	-20	+35
Mod2	+10	+20	-5

□

Beispiel 5.7. Nicht jedes Spiel kann man einfach als Matrixspiel darstellen. Z.B. in “Tic Tac Toe” werden sich die beiden Spieler nicht gleichzeitig für eine Strategie entscheiden müssen. Im Lauf des Spiels stehen den beiden Spielern immer weniger Strategien zur Verfügung. □

Ist das Spiel kein Nullsummenspiel, so soll man i.A. eine kompliziertere Notation einführen, z.B.

	B1	B2	B3
A1	(4,2)	(2,1)	(2,1)
A2	(2,1)	(3,1)	(1,5)
A3	(2,0)	(1,2)	(2,3)

Die Strategie A_2, B_3 liefert z.B. eine Auszahlung von 1 bzw. 5 dem 1. bzw. 2. Spieler. Gibt es $c \in \mathbb{R}$ so dass für jeden Eintrag $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij_1}, a_{ij_2})$ die Gleichung $a_{ij_1} + a_{ij_2} = c$ erfüllt wird, so kann man ein solches Spiel immer noch auf ein Nullsummen-Matrixspiel reduzieren. Das untere Spiel aus dem Beispiel 5.19 läßt sich auf ein Nullsummen-Matrixspiel reduzieren, die beiden Spiele aus den Beispielen 5.9 und 5.20 jedoch nicht.

Beispiel 5.8. Auch Nullsummenspiele Spiele können so dargestellt werden, z.B. wird das Spiel aus dem Beispiel 5.6 zu

	Mod1	Mod2
Mod1	(+10,-10)	(-10,+10)
Mod2	(+20,-20)	(-20,+20)
Mod3	(-35,+35)	(+5,-5)

□

Beispiel 5.9. Ich möchte mich nicht impfen lassen, mein Mitbewohner auch nicht. Zum Arzt Gehen ist lang und teuer und langweilig: das alles kostet mir 10 Glückseinheiten. Andererseits würde uns die Schweinegrippe gleich 100 Glückseinheiten kosten. Lässt sich einer uns beiden impfen, dann ist auch der andere sicher, dass er nicht angesteckt werden kann. Lässt sich jedoch keiner von uns beiden impfen, dann werden wir sicherlich beide angesteckt. Die Auszahlungsmatrix dieses Nichtnullsummenspiel ist also

	Impf.	Nichtimpf.
Impf.	(-10,-10)	(0,-10)
Nichtimpf.	(-10,0)	(-100,-100)

□

Wir werden nur Matrixspiele betrachten, d.h. Spiele, bei denen die Spieler sich mit ihren Entscheidungen gegenseitig beeinflussen.

Betrachte ein Matrixspiel. Der 1. Spieler möchte seine Verluste minimieren, also möchte die Strategie auswählen, welche ihm erlaubt, in größter anzunehmender Unfall (d.h., bei vom 2. Spieler optimal ausgewählter Strategie) möglichst wenig zu verlieren. Dazu betrachtet man den schlechtesten Ausgangsfall für jede Strategie, also

$$\alpha_i := \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$$

und dann bildet man

$$\alpha := \max_{1 \le i \le m} \alpha_i.$$

Die Zahl α heißt *unterer Wert des Spiels*: egal was der 2. Spieler machen wird, kann der 1. Spieler kein Ergebnis schlechter als α erwarten.

Ähnlich kann der 2. Spieler versuchen, seinen Gewinn zu maximieren, also den Gewinn des 1. Spielers zu minimieren: er/sie betrachtet

$$\beta_j := \max_{1 \le i \le m} a_{ij}$$

und bildet dann

$$\beta := \min_{1 \le j \le m} \beta_j.$$

Die Zahl β heißt *oberer Wert des Spiels*: egal was der 1. Spieler spielen wird kann der 2. Spieler kein Ergebnis schlechter als β erwarten, also kann der 1. Spieler kein Ergebnis besser als β erwarten.

Die beiden dementsprechenden Strategien heißen *Maximin-* bzw. *Minimaxstrategien*, und man spricht pauschal vom *Minimaxprinzip*. Die Maximinstrategie des 1. Spielers entspricht der Minimaxstrategie des 2. Spielers und die Minimaxstrategie des 1. Spielers entspricht der Maximinstrategie des 2. Spielers

Beispiel 5.10. Im Beispiel 5.1 ist der untere bzw. obere Wert des Spiels offensichtlich -1 bzw. $+1$.

Im Beispiel 5.4 schreibt man

	Mod1	Mod2	α_j
Mod1	60	40	**40**
Mod2	70	30	30
Mod3	15	55	15
β_i	70	**55**	

und dadurch wird klar, dass das 1. Team nicht mehr als 55% und nicht weniger als 40% Erfolgswahrscheinlichkeit erwarten kann. Die Maximinstrategie des 1. Teams besteht also darin, sein 1. Modell zu nutzen; die Minimaxstrategie des 2. Teams besteht darin, sein 2. Modell zu nutzen. Jede Abweichung von dem Minimaxprinzip kann zu höheren Verlusten des 1. Teams bzw. zu niedrigeren Gewinnen des 2. Teams führen. □

Beispiel 5.11. Auch Nichtmatrixspiele können rational untersucht werden. Z.B. kann man bei Tic Tac Toe merken, dass der 1. Spieler am Anfang die Wahl unter 9 Strategien hat. Der 2. Spieler hat dann 8 Felder zur Verfügung, die noch frei sind. In der 3. Runde kann der 1. Spieler antworten mit einem X in einem der übrigen 7 freien Felder, usw. Ab der 5. Runde kann der 1. Spieler gewinnen, ab der 6. Runde der 2. Spieler. Man kann die gesamten Strategien mittels eines Baums darstellen, mit $9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1 = 9!$ Endecken – also mit insgesamt $9! = 362.880$ theoretischen Strategien. (Tatsächlich sind es viel weniger, weil manche Zweige des Baums schon nach 5 Runden keine Aufmersamkeit mehr brauchen (der 1. Spieler hat schon gewonnen), manche andere Zweige schon nach 6 Runden (der 2. Spieler hat schon gewonnen), usw.)

Eine rationale Möglichkeit besteht darin, bei jeder Runde alle möglichen Endergebnisse zu betrachten, die aus einer Strategie folgen können, und sich dann für den Zweig (also für das Spielfeld) zu entscheiden, welches die größte Anzahl für sich selbst erfolgreicher Endergebnisse beinhaltet, bzw. die kleinste Anzahl für den Gegner erfolgreicher Endergebnisse. □

Das Minimaxprinzip ist i.A. höchst unstabil, d.h., der Zustand in dem beiden Partien ihre Maximin- bzw. Minimaxstrategien ist sehr anfällig für Störungen, z.B. in Form von Informationen, die sie über die vom Gegner ausgewählten Strategien erhalten könnten. Ist aber $\alpha = \beta$, so sind Maximin- bzw. Minimaxstrategien stabil: weicht einer der beiden Spieler von dem Minimaxprinzi ab, so kann er/sie dadurch nur verlieren. Ist dieser der Fall, dann heißt $\alpha = \beta$ der *Wert des Spiels*, und das Paar der dementsprechenden Strategien die *Lösung des Spiels* bzw. das *Nash-Gleichgewicht* des Spiels. Ein Spiel mit Wert 0 heißt *fair*. Diese Theorie ist zum Teil von John Nash entwickelt worden, der dafür 1994 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhalten hat.

Betrachte ein Nullsummenspiel: Ist der Eintrag $a_{i_0 j_0}$ der Auszahlungsmatrix gleichzeitig Minimum der i_0-ten Zeile und Maximum der j_0-ten Spalte, so heißt das Paar der dementsprechenden Strategien *Sattelpunkt* des Spiels.

Satz 5.12. *Gegeben sei ein Nullsummen-Matrixspiel. Ein Sattelpunkt existiert genau dann, wenn das Spiel einen Wert (und deshalb eine Lösung) hat.*

Beispiel 5.13. Betrachte ein Matrixspiel

	B1	B2	B3	B4	α_j
A1	0,4	0,5	0,9	0,3	0,3
A2	0,8	0,4	0,3	0,7	0,3
A3	0,7	0,6	0,8	0,9	**0,6**
A4	0,7	0,2	0,4	0,6	0,2
β_i	0,8	**0,6**	0,8	0,9	

□

Anmerkung 5.14. Betrachte ein Nullsummen-Matrixspiel mit Auszahlungsmatrix A. Betrachte die Matrix $\tilde{A}$ die dadurch definiert wird, dass

- man die i-te Zeile von A streicht, falls $a_{ij} \leq a_{kj}$ für ein $k \neq i$ und alle j oder
- man die j-te Spalte von A streicht, falls $a_{ij} \leq a_{i\ell}$ für ein $\ell \neq j$ und alle i (möglicherweise kann diese Verfahren mehrmals durchgeführt werden).

Dann sind oberer und unterer Wert des mit $\tilde{A}$ assoziierten Matrixspiels gleich oberer und unterer Wert des mit A assoziierten Matrixspiels, und $\tilde{A}$ heißt reduzierte Auszahlungsmatrix.

Beispiel 5.15. Anstatt der Auszahlungsmatrix aus dem Beispiel 5.3 ist es genug, die reduzierte Matrix

	G+1	G+2	U+1	U+2
G+1	0	0	+1	-1
G+2	0	0	-1	+1
U+1	-1	+1	0	0
U+2	+1	-1	0	0

zu betrachten. □

Beispiel 5.16. Anstatt der Auszahlungsmatrix aus dem Beispiel 5.5 für das Spiel "Schere, Stein, Papier, Brunnen" ist es genug, die reduzierte Matrix

	Sch.	Pap.	Br.
Sch.	0	+1	-1
Pap.	-1	0	+1
Br.	+1	-1	0

zu betrachten. Also, die Strategie "Brunnen" ist mindestens so günstig wie "Stein". Dieses modifizierte Spiel "Schere, Papier, Brunnen" ist nun offensichtlich äquivalent zu "Schere, Stein, Papier". □

Anmerkung 5.17. Betrachte ein Nichtnullsummen-Matrixspiel. Man kann einen ähnlichen, anschaulichen Algorithmus für die Bestimmung eines Nash-Gleichgewichts formulieren. Für jede feste Strategie des 1. Spielers markiere den für den 1. Spieler optimalen Eintrag der Matrix. Optimiere nun die Gewinne des 2. Spielers bzgl. jeder festen Strategie des 1. Spielers. Ist ein Paar völlig markiert, so sind die dementsprechenden Strategien ein Nash-Gleichgewicht.

Beispiel 5.18. Betrachte das Nichtnullsummenspiel aus dem Beispiel 5.9.

	Impf.	Nichtimpf.
Impf.	(-10,-10)	(**-10**,**0**)
Nichtimpf.	(**0**,**-10**)	(-100,-100)

Drei Nash-Gleichgewichte liegen also vor. (Aufgrund ihrer Symmetrie sind aber zwei dieser Lösung nicht wirklich gebräuchlich.) □

Beispiel 5.19. Betrachte das folgende Spiel. Der 1. Spieler hat vor sich zwei Karten, eine Dame und einen König. Zieht er den König, so sagt er "Ich habe einen König" und fragt den 2. Spieler nach 1 EUR. Zieht er jedoch eine Dame, so kann er entscheiden, entweder gleich dem 2. Spieler 1 EUR zu zahlen, oder zu bluffen und 1 EUR zu verlangen. Nun kann der 2. Spieler entweder 1 EUR ausgezahlt bekommen, oder – wenn der 1. Spieler von ihm 1 EUR verlangt – kann er die Aussage des 1. Spielers überprüfen. In diesem Fall kann er entweder 2 EUR selber auszahlen – falls der 1. Spieler tatsächlich einen König hat – oder 2 EUR ausgezahlt bekommen – falls der 2. Spieler geblufft hat.

Dies kann man als Zweipersonen-Matrixspiel darstellen. Sowohl der 1. als auch der 2. Spieler haben 2 mögliche Strategien: bluffen/nicht bluffen bzw. glauben/nicht glauben.

Die Auszahlungsmatrix kann folgendermaßen gebildet werden:

1. Fall: bluffen/glauben. Zieht der 1. Spieler einen König, so spielt es keine Rolle, ob er bluffen will oder nicht: er verdient gleich 1 EUR, denn der 2. Spieler glaubt ihm. Zieht der 1. Spieler eine Dame, so blufft er und der 2. Spieler glaubt ihm und zahlt ihm 1 EUR aus.
2. Fall: Fall bluffen/nicht glauben. Zieht der 1. Spieler einen König (50% Wahrscheinlichkeit), so spielt es keine Rolle, ob er bluffen will oder nicht: er sagt die Wahrheit und kriegt 2 EUR ausgezahlt, denn der 2. Spieler hat ihm nicht geglaubt. Hat der 1. Spieler jedoch eine Dame gezogen (50% Wahrscheinlichkeit), so muß er dem 2. Spieler 2 EUR auszahlen. Im Durschnitt erhält also der 1. Spieler 0 EUR.
3. Fall: Fall nicht bluffen/glauben. Zieht der 1. Spieler einen König (50% Wahrscheinlichkeit), so spielt es keine Rolle, ob er bluffen will oder nicht: er sagt die Wahrheit und kriegt 1 EUR ausgezahlt, denn der 2. Spieler hat ihm geglaubt. Hat der 1. Spieler jedoch eine Dame gezogen (50% Wahrscheinlichkeit), so muß er dem 2. Spieler 1 EUR auszahlen. Im Durschnitt erhält also der 1. Spieler 0 EUR.
4. Fall: Fall nicht bluffen/nicht glauben. Zieht der 1. Spieler einen König (50% Wahrscheinlichkeit), so spielt es keine Rolle, ob er bluffen will oder nicht: er sagt die Wahrheit und kriegt 2 EUR ausgezahlt, denn der 2. Spieler hat ihm nicht geglaubt. Hat der 1. Spieler jedoch eine Dame gezogen (50% Wahrscheinlichkeit), so zahlt er gleich dem 2. Spieler 1 EUR. Im Durschnitt zahlt also der 1. Spieler 0,5 EUR aus.

Die Auszahlungsmatrix ist also

	G	NG
B	(**1**,-1)	(0,**0**)
NB	(0,**0**)	(**0,5**,-0,5)

also handelt es sich um ein Nullsummenspiel. Die Auszahlungsmatrix hat keinen Sattelpunkt, das Spiel hat also keinen Wert. □

Beispiel 5.20. Die Theorie des Nash-Gleichgewichts führt auch zu Paradoxergebnisse. Im *Gefangenendilemma* sollen zwei Gefangen getrennt voneinander entscheiden, wie sie plädieren sollen. Die Auszahlungsmatrix lautet

	Schuldig	Nicht schuldig
Schuldig	(**-6**,**-6**)	(**0**,-7)
Nicht schuldig	(-7,**0**)	(-1,-1)

(wenn nur einer sich schuldig bekennt muss er nicht ins gefängnis gehen). Also ist das einzige Nash-Gleichgewicht die Strategie beider Gefangenen, sich schuldig zu bekennen. Intuitiv wäre die optimale Strategie, sich beide als nicht schuldig zu bekennen: dies wäre aber kein Gleichgewicht, denn der andere Gefangene könnte durch eine unilaterale Abweichung sich retten. Eine solche Strategie wäre erst dann tatsächlich günstig, wenn das Spiel *kooperativ* wäre, wenn beide Spieler also eine gemeinsame Entscheidung treffen könnten, und sich darauf verlassen könnten, dass diese Entscheidung auch eingehalten wird.

Ein weiterer Lösungsbegriff ist der eines Pareto-Optimum. Ein Strategienpaar heißt ein *Pareto-Optimum*, falls die Lage von jedem Spieler nur dadurch erreicht werden kann, dass die Lage des anderen Spielers verschlechtert wird. Im Fall vom Gefangenendilemma wäre die Strategie (Nicht schuldig/Nicht schuldig) ein Pareto-Optimum. □

Beispiel 5.21. Das *Gefangenendilemma* taucht in sehr vielen Fälle auf. Z.B. im kalten Krieg wäre für beide Sowjetunion und USA eine atomare Abrüstung günstiger gewesen, doch waren sie zum Nash-Gleichgewicht (atomare Aufrüstung) verdammt, so lang sie nicht wussten, was die andere Macht wirklich vorhatte. Die Auszahlungsmatrix könnte ungefähr so aussehen (die echten Daten sind meistens immer noch Staatsgeheimnis):

	Aufrüstung	Abrüstung
Aufrüstung	(**-13 Trillionen**,**-10 Trillionen**)	(**-1 Milliarde**,$-\infty$)
Abrüstung	($-\infty$,**-1 Milliarde**)	(-2 Milliarden,-2 Milliarden)

Im Fall von Abrüstung beider Mächten sollen nur geringe Beträge für Standardausgaben bezahlt werden. Hätte allerdings nur eine Macht abgerüstet, so hätte die andere Macht sie leicht mit Atomwaffen abschlagen – und sie für immer loswerden – können, ohne weiteres Bedürfnis in Waffen zu investieren. □

Sollte einer der Spieler verstanden haben, welcher Strategie der andere Spieler regelmäßig folgt, so könnte er sie mit einer geeigneter Strategie entgegnen. So könnte z.B. der 1. Spieler des Beispiels 5.2 das 3. Modell nutzen, wenn er verstanden hätte, dass der 2. Spieler regelmäßig das 2. Modell anwendet. Es ist also geeigneter, unterschiedliche Strategien zufällig auszuwählen und anzuwenden (*gemischte Strategie*). Gemischte Strategien enthalten reine Strategien als Spezialfall.

Bestehen für den 1. bzw. 2. Spieler m bzw. n mögliche reine Strategien, so bezeichnet man durch

$$S_p^{(1)} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

eine gemischte Strategie des 1. Spielers, die aus den reinen Strategien $A_1, A_2, \dots, A_m$ besteht, welche jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p_1, p_2, \dots, p_m$ gespielt werden – und ähnlich für eine gemischte Strategie

$$S_q^{(2)} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

des 2. Spielers. Dabei soll

$$p_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

sowie

$$q_i \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

sein, es liegt also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vor. Kurz schreiben wir

$$p \in \Sigma_m := \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \right\}$$

und

$$q \in \Sigma_n := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}.$$

Haben beide Spieler (unabhängig voneinander) eine Entscheidung über ihre gemischte Strategien $S_p^{(1)}, S_q^{(2)}$ (nur anhand der Spielmatrix!) getroffen und teilen sie dem Gegner diese Strategie mit, so kann der 1. Spieler eine Auszahlung von

$$E(S_p^{(1)}, S_q^{(2)}) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$$

erwarten (Erwartungswert der Auszahlungszufallsvariablen).

Beispiel 5.22. Betrachte das Spiel aus dem Beispiel 5.1. Betrachte die Strategien

$$S_p^{(1)} = S_q^{(2)} := \begin{pmatrix} G+1 & G+2 & U+1 & U+2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$E(S_p^{(1)}, S_q^{(2)}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} a_{ij} = 0.$$

□

Ein Paar $(S_{p_0}^{(1)}, S_{q_0}^{(2)})$ von gemischten Strategien heißt (gemischter) *Sattelpunkt* des Spiels, falls

$$E(S_p^{(1)}, S_{q_0}^{(2)}) \leq E(S_{p_0}^{(1)}, S_{q_0}^{(2)}) \leq E(S_{p_0}^{(1)}, S_q^{(2)})$$

für alle weiteren gemischten Strategien $S_p^{(1)}, S_q^{(2)}$. Man möchte also Sattelpunkte des Spiels suchen.

Man kann das Minimaxprinzip zum Kontext der gemischten Strategien erweitern. Minimiert man erst über alle (gemischten oder reinen, es ist egal) Strategien des Gegners und maximiert dann über alle eigenen gemischten Strategien, so betrachtet man also den *gemischten unteren Wert* und den *gemischten oberen Wert* des Spiels.

Satz 5.23. *Es gilt*

$$\alpha_* := \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \leq j \leq n} E(S_p^{(1)}, B_j) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \tag{5.1}$$

und

$$\beta_* := \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \leq i \leq m} E(A_i, S_q^{(2)}) = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{i=1}^{m} q_j a_{ij}. \tag{5.2}$$

(Da jede reine Strategie auch eine (triviale) gemischte Strategie darstellt, identifizieren wir B_j mit der gemischten Strategie, deren zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung $p = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ ist, 1 nur an der j-ten Stelle).

Gilt $\alpha_* = \beta_*$, so heißt diese Zahl *gemischter Wert* des Spiels. Ein Paar $(S_p^{(1)}, S_q^{(2)})$ heißt eine *gemischte Lösung* des Spiels, falls $E(S_p^{(1)}, S_q^{(2)})$ mit dem Wert des Spiels übereinstimmt. Jede reine Strategie A_i so, dass $p_i > 0$ (d.h., so dass sie in einer Lösung tatsächlich vorkommt), heißt *nützliche Strategie.* Es gilt

$$\alpha \leq \alpha_* \leq \beta_* \leq \beta,$$

da reine Strategien triviale gemischte Strategien sind (mit nur einer nützlichen Strategie).

Satz 5.24. *Existiert eine gemischte Lösung $(S_p^{(1)}, S_q^{(2)})$ eines Spiels, in dem der 2. Spieler n nützliche Strategien hat (o.B.d.A. $B_1, \dots, B_n$) und spielt der 1. Spieler die Strategie $S_p^{(1)}$, so wird ihm immer dasselbe ausgezahlt, egal in welchem Verhältnis der 2. Spieler seine nützlichen Strategien mischt (d.h., egal welche Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\{B_1, \dots, B_n\}$ vom 2. Spieler ausgewählt wird): anders gesagt,*

$$E(S_p^{(1)}, S_q^{(2)}) = E(S_p^{(1)}, B_j) \qquad \text{für alle } j = 1, \dots, n.$$

[**9**, §3]

Dies liegt daran, dass (nach Definition) keine reine Strategie für den 2. Spieler günstiger als $S_q^{(2)}$ sein kann, also erfüllt der Erwartungswert

$$E(S_p^{(1)}, S_q^{(2)}) \geq E(S_p^{(1)}, B_j) \qquad \text{für alle } j.$$

Andererseits gilt

$$E(S_p^{(1)}, S_q^{(2)}) = \sum_{j=1}^{n} E(S_p^{(1)}, B_j) q_j,$$

also kann kein Erwartungswert $E(S_p^{(1)}, B_j)$ strikt größer als $E(S_p^{(1)}, S_q^{(2)})$ sein.

Der einfachste Fall ist der von 2 Spielern mit jeweils 2 möglichen reinen Strategien, also eines Matrixspiels mit 2×2-Auszahlungsmatrix. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass das Matrixspielt bereits im Sinne von Anmerkung 5.14 reduziert ist. Wir nehmen auch an, dass keine reine Lösung existiert, also sollen beide Strategien des 2. Spielers nützlich sein. Insbesondere gilt

$$a_{11} + a_{22} \neq a_{21} + a_{12}$$

und somit

$$a_{11} \neq a_{12} \quad \text{oder} \quad a_{22} \neq a_{21}.$$

Liegt eine gemischte Lösung vor (mit assoziiertem – noch unbekanntem – Wert w), so gilt laut Satz 5.24 notwendigerweise

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = w = a_{12}p_1 + a_{22}p_2.$$

Da aber $p_2 = 1 - p_2$, hat man

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad p_2 = 1 - p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

und der Wert des Spiels ist also

$$w = \frac{(a_{22} - a_{21})a_{11} + (a_{11} - a_{12})a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Aus den entsprechenden Gleichungen für den 2. Spieler erhält man

$$q_1 = \frac{w - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad q_2 = 1 - q_1 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Beispiel 5.25. Betrachte das Spiel aus dem Beispiel 5.4. Das 1. Modell des 1. Teams ist kaputt, also verfügt das Team 1. nur über 2 mögliche Strategien. Die neue Auszahlungsmatrix ist also

	Mod1	Mod2
Mod2	70	30
Mod3	15	55

Aus

$$70p_1 + 15(1 - p_1) = 30p_1 + 55(1 - p_1)$$

folgt

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

(intuitiv, weil $|a_{11} - a_{12}| = |a_{21} - a_{22}|$) mit Spielwert

$$w = \frac{70 + 15}{2} = \frac{85}{2},$$

während für das 2. Team gilt

$$70q_1 + 30(1 - q_1) = w$$

und somit

$$q_1 = \frac{5}{16}, \qquad q_2 = \frac{9}{16}.$$

□

Beispiel 5.26. Betrachte das Spiel aus dem Beispiel 5.19: die optimalen Strategien für den 1. bzw. 2. Spieler lauten

$$S_p^{(1)} = \begin{pmatrix} B & NB \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad S_q^{(2)} = \begin{pmatrix} G & NG \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Wie schon angemerkt hat das Spiel keinen *reinen* Wert. Es ist interessant zu merken, dass der untere Wert des Spiels 0 ist, ja sind beide Spielmöglichkeiten des 1. Spielers Maximinstrategien (während die Nichtbluffstrategie die einzige Minimaxstrategie ist), doch ist der *gemischte* Wert $= \frac{1}{3}$. Also ist das Spiel nicht fair. Diese Gunst kann der 1. Spieler erst genießen, wenn er gemischte Strategien spielt.

Es ist vielleicht wenig intuitiv, dass der 1. Spieler nicht immer (oder zumindest häufiger) seine scheinbar optimalere Strategie nutzen sollte, nämlich bluffen. Weil aber die Nicht-Glauben-Strategie für den 2. Spieler offensichtlich günstiger ist, befindet sich der 1. Spieler in dem Dilemma, dass eine häufigere Nutzung seiner "günstigeren" Strategie (Bluffen) ihn häufiger auch damit konfrontieren würde, dass sein Gegner mit der (für den 1. Spieler) ungünstigsten Strategie antwortet. □

Will man allgemeinere Nullsumen-Matrixspiele (mit Auszahlungsmatrix A) lösen, so soll man folgendes beobachten: Bei der Suche einer Lösung – also eines Paars $(S_p^{(1)}, S_q^{(2)})$ optimaler Strategien – ist der Erwartungswert $E(S_p^{(1)}, S_q^{(2)})$ durch den oberen bzw. unteren Wert des Spiels maximiert bzw. minimiert. Der 1. Spieler möchte also einen möglichst hohen gemischten unteren Wert erzielen, also (laut (5.1)) möchte man

$$u := \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$$

maximieren, unter der Beschränkung, dass (selbstverständlich)

$$u \le \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ik} \qquad \text{für alle } k = 1, \ldots, n,$$

für $p \in \Sigma_m$, also für $p_1, \ldots, p_m$ so, dass

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

und

$$p_i \ge 0$$

(aber ohne Beschränkungen über das Vorzeichen von $\min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$). Führt man eine neue Variable

$$\tilde{p} := \left(p_1, \ldots, p_m, u := \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \right)$$

ein, so kann man einfach die lineare Maximierungsaufgabe

$$\text{maximiere} \qquad \tilde{z} = \tilde{c}\tilde{p}$$

unter den Beschränkungen

$$\tilde{A}_1 \tilde{p} \le 0$$

und

$$\tilde{A}_2 \tilde{p} = 1$$

und

$$p_1, \ldots, p_m \ge 0,$$

wobei

$$\tilde{p} = (p_1, \ldots, p_m, u)$$

und

$$c = (0, \ldots, 0, 1)$$

und

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} -a_{11} & \ldots & -a_{m1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{1n} & \ldots & -a_{mn} & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine optimale Strategie dieser linearen Maximierungsaufgabe liefert dann gleichzeitig eine gemischte Maximinstrategie $(p_1, \ldots, p_m)$ des 1. Spielers und den unteren Wert u des Spiels.

Diese Maximierungsaufgabe kann man weiter vereinfachen, indem man die neue Variable

$$x := \frac{\tilde{p}}{u} = \left(\frac{p_1}{u}, \ldots, \frac{p_m}{u}, 1 \right)$$

einführt. Weil

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{u} = \frac{1}{u} \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{u}$$

gilt, ist die obige Maximierungsaufgabe zur folgenden linearen Minimierungsaufgabe äquivalent:

$$\text{minimiere} \qquad z = (1, \ldots, 1)x = \frac{1}{u}$$

unter den Beschränkungen

$$A^T x \geq 1$$

und

$$x \geq 0.$$

Anmerkung 5.27. Um den Simplexalgorithmus durchzuführen benötigt man, dass der Wert des Spiels > 0 ist. Das ist gewährleistet, wenn alle einträge der Auszahlungsmatrix > 0 sind. Es reicht also, eine $c > 0$ groß genug auf alle Einträge der Auszahlungsmatrix zu addieren, und mit dieser neuen Auszhalungsmatrix $\tilde{A} = (a_{ij} + c)$ mit lauten positiven Einträge die Minimierungsaufgaben zu lösen: schließlich soll man c aus dem dadurch erhalten Wert abziehen, um den Wert des *ursprünglichem* Spiels zu bekommen. Die Maximin- bzw. Minimaxstrategie bleiben jedoch unverändert.

Ähnlich ist das optimale Verhalten des 2. Spielers durch die Lösung der linearen Maximierungsaufgabe

$$\text{maximiere} \qquad w = (1, \ldots, 1)y$$

unter den Beschränkungen

$$A^T y \leq 1$$

und

$$y \geq 0$$

gegeben (hier ist es entscheidend, dass es sich um einem Nullsummenspielhandelt, so dass man A^T und nicht die Auszahlungsmatrix des 2. Spielers betrachten kann). Beide Aufgaben sind zulässig: denn die Strategie $(0, \ldots, 0)$ (in $\mathbb{R}^m$) ist eine zulässige Strategie der dualen Aufgabe, während die Strategie $((\zeta m)^{-1}, \ldots, (\zeta m)^{-1})$ eine zulässige Strategie der primalen Aufgabe ist (wobei ζ das Maximum unter alle Einträge von A ist). Da aber die zweite Aufgabe die zur obigen Minimierungsaufgabe duale Aufgabe ist, ist Zulässigkeit der beiden Aufgaben eine für die Existenz einer optimalen Strategie (für jeden der beiden Spieler) hinreichende Bedingung, und dann stimmen die beiden optimalen Lösungen überein. Weil aber die optimalen Lösungen die Inversen des unterem bzw. oberem Wert des Spiels darstellen, heißt das, dass der untere und der obere Wert des Spiels übereinstimmen, d.h. das Spiel hat einen (gemischten) Wert und somit eine (gemischte) Lösung.

Fundamentalsatz der Spieltheorie. *Jedes Nullsummen-Matrixspiel hat mindestens eine – möglicherweise durch ein Paar von gemischten Strategie gegebene – Lösung und deshalb einen (möglicherweise gemischten) Wert.*

Anders gesagt gibt es ein Paar von (möglicherweise gemischten) Strategien, so dass eine unilaterale Abweichung nur zu Verluste führen kann.

Anmerkung 5.28. Weil die Zulässigkeit sowohl einer linearen Maximierungsaufgabe als auch ihrer Duale die Eindeutigkeit einer optimale Lösung *nicht* implizieren, kann der Fundamentalsatz nicht die Eindeutigkeit eines opetimalen Paars gemischter Strategien gewährleisten.

Beispiel 5.29. Betrachte das Nullsummenspiel "Schere, Stein, Papier" (oder auch "Schere, Stein, Papier, Brunnen", vgl. Anmerkung 5.16). Nach Verschiebung um $c = 2$ lautet die Auszahlungsmatrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir wollen die optimale gemischte Strategie für den 2. Spieler bestimmen: aus Symmetriegründen wird die optimale gemischte Strategie des 1. Spielers gleich sein. Man betrachtet also die lineare Maximierungsaufgabe

$$\text{maximiere} \qquad -z = (-1 \ -1 \ -1)x$$

unter den Beschränkungen

$$-\tilde{A}x \leq -1$$

und

$$0 \leq x \in \mathbb{R}^3.$$

Führe die Schlupfvariablen $x_4, x_5, x_6 \geq 0$ ein.

- Das erste Wörterbuch ist

$$\begin{array}{rcrrrr} x_4 & = & -1 & +2x_1 & +x_2 & +3x_3 \\ x_5 & = & -1 & +3x_1 & +2x_2 & +x_3 \\ x_6 & = & -1 & +x_1 & +3x_2 & +2x_3 \\ \hline -z & = & & -x_1 & -x_2 & -x_3, \end{array}$$

  welches die zulässige Strategie $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, $x_6 = 0$ beschreibt, was zu einem Wert $z = 1$ der Zielfunktion führt (d.h., zu einem Wert $= 1$ des modifiziertem, mit der Auszahlungsmatrix $\tilde{A}$ assoziiertem Spiels).
- Die Zielfunktion $-z$ kann durch Vergrößerung von $-x_1, -x_2, -x_3 \leq 0$, also durch Verkleinerung von $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ vergrößert werden (dabei ist aber $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$ keine zulässige Lösung – sonst könnte die Aufgabe trivialerweise bereits gelöst werden). Setze also $x_2 = x_3 = 0$ und maximiere $-z$ durch Verkleinerung von x_1: erhalte $x_1 = \frac{1}{3}$ aus der Gleichung zu x_5.
- Pivoting $x_1 \leftrightarrow x_5$ liefert das zweite Wörterbuch

$$\begin{array}{rcrrrr} x_1 & = & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & +\frac{1}{3}x_5 \\ x_4 & = & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}x_2 & +\frac{7}{3}x_3 & +\frac{2}{3}x_5 \\ x_6 & = & -\frac{2}{3} & +\frac{7}{3}x_2 & +\frac{5}{3}x_3 & +\frac{1}{3}x_5 \\ \hline -z & = & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}x_2 & -\frac{2}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_5. \end{array}$$

- Die Zielfunktion $-z$ kann durch Verkleinerung von x_2, x_3, x_5 vergrößert werden. Wieder ist aber $(x_2 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0)$ keine zulässige Lösung. Setze also $x_3 = x_5 = 0$ und maximiere $-z$ durch Verkleinerung von x_2: erhalte $x_2 = \frac{2}{7}$ aus der Gleichung zu x_6.

- Pivoting $x_2 \leftrightarrow x_6$ liefert das dritte Wörterbuch

$$\begin{array}{rclllll} x_2 & = & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7}x_3 & -\frac{1}{7}x_5 & +\frac{3}{7}x_6 \\ x_1 & = & \frac{1}{7} & +\frac{1}{7}x_3 & +\frac{3}{7}x_5 & -\frac{2}{7}x_6 \\ x_4 & = & -\frac{3}{7} & +\frac{18}{7}x_3 & +\frac{5}{7}x_5 & -\frac{1}{7}x_6 \\ \hline -z & = & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7}x_3 & -\frac{2}{7}x_5 & -\frac{1}{7}x_6. \end{array}$$

- Die Zielfunktion $-z$ kann durch Verkleinerung von x_3x, x_5, x_6 vergrößert werden. Noch einmal ist aber $(x_3 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0)$ keine zulässige Lösung. Setze also $x_5 = x_6 = 0$ und maximiere $-z$ durch Verkleinerung von x_3: erhalte $x_3 = \frac{1}{6}$ aus der Gleichung zu x_4.
- Pivoting $x_3 \leftrightarrow x_4$ liefert das vierte Wörterbuch

$$\begin{array}{rclllll} x_3 & = & \frac{1}{6} & +\frac{7}{18}x_4 & -\frac{5}{18}x_5 & +\frac{1}{18}x_6 \\ x_2 & = & \frac{1}{6} & -\frac{5}{18}x_4 & +\frac{1}{18}x_5 & +\frac{7}{18}x_6 \\ x_1 & = & \frac{1}{6} & +\frac{1}{18}x_4 & +\frac{7}{18}x_5 & -\frac{5}{18}x_6 \\ \hline -z & = & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}x_4 & -\frac{1}{6}x_5 & -\frac{1}{6}x_6. \end{array}$$

  Die Zielfunktion kann nicht weiter vergrößert werden, als wenn man $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ setzt – was in diesem Fall die doch zulässige Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ liefert. Der Wert w des *modifizierten* Spiels (also nach Verschiebung um $c = 2$) ist also durch

$$\frac{1}{w} = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$$

  gegeben, und somit ist der Wert des ursprünglichem Spiels $= 2 - 2 = 0$, also ist das Spiel fair. Die optimale Strategie des 1. Spielers daraus, jede Spielmöglichkeit mit Wahrscheinlichkeit $p_i = x_i w = \frac{1}{3}$ anzuwenden, wie man auch hätte erwarten können. Aufgrund der Symmetrie ist die optimale Strategie des 2. Spielers gleich.

$\square$

Anmerkung 5.30. Im Allgemeinen kann man zeigen, dass jedes Zweipersonenspiel mit endlicher Spieldauer (wie z.B. Schach) als Matrixspiel dargestellt werden kann, wobei die Matrix möglicherweise sehr viele Spalten und Zeilen haben kann. In diesem Sinne kann man (theoretisch) die meisten Brettspiele lösen, also existiert eine für beide Spieler optimale Strategie – das benötigt aber einen riesigen Rechenaufwand, so dass die Lösung für die meisten Spiele praktisch unbestimmbar und/oder für Menschen nicht auswendig lernbar ist. Z.B. wurde das Damespiel 2007 gelöst: dabei führt ein perfektes Spiel beider Spieler zu einem Unentschieden (Wert des Spiels=0).

KAPITEL 6

Differenzialgleichungen: Existenz und Eindeutigkeit

Betrachte eine Bevölkerung: Menschen, Bakterien, usw. Man kann mit einem gewissen Realismus annehmen, dass (zumindest für kleinen Zeitschritte Δt) die Steigerung der Größe der Bevölkerung proportional zu Δt und zur Anfangsgröße ist, etwa

$$P(t+\Delta)t - P(t) = \gamma \Delta t P(t).$$

Für immer kleiner werdende Zeitschritte Δt erhält man also

$$\gamma P(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P(t+\Delta)t - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt}(t) =: P'(t).$$

Diese und weitere Gleichungen, welche eine Funktion und eine (oder mehrere) ihrer Ableitungen umfassen, heißen *Differenzialgleichungen*.

Beispiel 6.1. Das einfachste Modell einer Bevölkerung: die Bevölkerungstheorie von Thomas Malthus (1798). Ohne Migrationseffekte ist die Anzahl von Geburten und Toden proportional zur heutigen Bevölkerung: Die *Steigerung* der Bewohneranzahl ist gleich der Geburtenrate minus der Sterberate, also

$$\frac{dN}{dt}(t) = \gamma N(t) - \tau N(t)$$

wobei $\gamma, \tau > 0$. Wenn die Bevölkerung groß ist, ist es vernünftig, ihre Anzahl durch eine Funktion $N : [0,\infty) \to [0,\infty)$ der Zeit zu beschreiben (selbst wenn etwa $\frac{3}{7}$ oder $e^{0,1}$ eines Individuums kaum sinnvoll sind). $\square$

Beispiel 6.2. Das zweiteinfachste Modell einer Bevölkerung: das logistische Modell von Pierre Verhulst (1838). Es gibt einen strukturellen Widerstand (Ressourcen, Raumbegrenzungen usw.) gegen unendliche Vermehrung der Bevölkerung. Man beschreibt Vermehrungs- und Sterbeprozesse durch Fortpflanzung und Verhungern, also

$$\frac{dN}{dt}(t) = \rho N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{\kappa}\right)$$

wobei $\rho, \kappa > 0$. Die Umwelt soll also die Vermehrung einer Bevölkerung beeinflussen. $\square$

Beispiel 6.3. Marktanalyse von M.L. Vidale und H.B. Wolfe (1957): wird die Werbung eines Produktes eingestellt, so nehmen die Verkäufe des Produktes proportional zu den Verkäufen in der vorigen Zeiteinheit ab, also

$$\frac{dv}{dt}(t) = \rho u(t)(1 - v(t)) - kv(t),$$

wobei $\rho, k > 0$ und $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$: dabei stellt $v : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ den Marktanteil dar, und deshalb ist $(1-v(t))$ der Anteil des Marktes, der noch zu erobern ist. Die Parametern ρ, k beschreiben die Wirkung der Werbung bzw. wie schnell sie vergessen wird und u misst die Ausgaben für Werbung zum Zeitpunkt t. $\square$

Beispiel 6.4. Radioaktiver Zerfall: Seien $n(t)$ die Atome einer radioaktiven Substanz zur Zeit t. Die Anzahl $n(t) - n(t-\Delta)$ der in einer Zeitspanne zerfallenden Atome ist proportional zur ursprünglichen Anzahl von Atomen, etwa

$$\frac{dn}{dt}(t) = -\lambda n(t)$$

für $\lambda > 0$. □

Seien $J_1, J_2, J_3 \subset \mathbb{R}$ drei Intervalle und $f : J_1 \times J_2 \times J_3 \to \mathbb{R}$. Eine Differenzialgleichung

$$f(t, y(t), y'(t)) = 0$$

zu lösen heißt, eine Funktion y und ein Intervall $I \subset J_1$ zu finden, so dass $y(t) \in J_2$ und $y'(t) \in J_3$ für alle $t \in J_1$ und y die obige Gleichung für alle $t \in I$ erfüllt. Ein solches y heißt *lokale* (bzw. *globale*) *Lösung* falls $I = J$ (bzw. falls $I \neq J$).

Eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung heißt *inhomogen*, wenn F in der Form

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = F_0(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) + F_1(t)$$

ist, wobei $F_1 \not\equiv 0$, sonst heißt sie *homogen*. Z.B. ist die Gleichung aus dem Beispiel 6.3 inhomogen, denn man kann sie als

$$\frac{dv}{dt}(t) = (\rho u(t) - k)v(t) + \rho u(t)$$

umschreiben.

Beispiel 6.5. Betrachte wieder das Beispiel 6.1. Dann wird eine globale Lösung durch

$$N(t) = N(0)e^{(\gamma-\tau)t}$$

gegeben. Allgemeiner erfüllt jede Funktion $t \mapsto e^{(\gamma-\tau)t}$ die Differenzialgleichung, diese Lösung ist aber nicht eindeutig. □

Anfangsbedingungen sind also i.A. nötig, um Differenzialgleichungen zu lösen. Ein *Cauchy-Problem* ist eine Differenzialgleichung, die mit einem Anfangswert versehen wird.

Beispiel 6.6. Betrachte wieder das Beispiel 6.4. Die Lösung ist durch

$$n(t) = n(0)e^{-\lambda t}$$

gegeben. So sieht man z.B., dass die *Halbwertszeit*, also die Zeit, welche die Substanz braucht, um sich zu halbieren (also $T > 0$, so dass $n(0) = 2n(T)$ gilt), durch

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

gegeben ist. Bei Uran-235, das üblicherweise in AKWs benutzt wird, beträgt die Halbwertszeit 703.800.000 Jahre. □

Existenzsatz von Peano. *Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann hat die Differenzialgleichung*

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

mit Anfangswert

$$y(x_0) = y_0$$

für f mit $(x_0, y_0) \in [a,b] \times [c,d]$ eine lokale Lösung

$$z : (a_0, b_0) \to \mathbb{R},$$

so dass $f(x, z(x)) = z'(x)$ für alle $x \in I$.

Beispiel 6.7. Sowohl die Differenzialgleichung

$$y'(t) = \sqrt{y(t)}$$

als auch

$$y'(t) = (y(t))^2$$

erfüllen die Voraussetzungen des Existenzsatzes von Peano. □

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt

- *global Lipschitz-stetig*, falls es eine Konstante $L_f \geq 0$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$
$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L_f \|x_1 - x_2\|$$
gilt;
- *lokal Lipschitz-stetig*, falls für alle $x \in [a,b]$ ein Intervall (α, β) mit $x \in (\alpha, \beta) \subset [a,b]$ existiert, so dass die Einschränkung $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ global Lipschitz stetig ist, also so dass es eine Konstante $L_{f,\alpha,\beta} \geq 0$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$
$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L_f \|x_1 - x_2\|$$
gilt.

Anmerkung 6.8.
- Jede lokal Lipschitz-stetige Funktion ist auch stetig.
- Eine (auf einem offenen Intervall definierte) differenzierbare Funktion ist genau dann global Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung beschränkt ist.
- Die Summe zweier auf einem beschränkten Intervall definierten global Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch global Lipschitz-stetig.
- Die Summe zweier lokal Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch lokal Lipschitz-stetig.
- Das Produkt zweier auf einem beschränkten Intervall definierten global Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch global Lipschitz-stetig.
- Das Produkt zweier lokal Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch lokal Lipschitz-stetig.
- Die Verkettung zweier auf einem beschränkten Intervall definierten global Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch global Lipschitz-stetig.
- Die Verkettung zweier lokal Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch lokal Lipschitz-stetig.

Beispiel 6.9. sin und cos sind global Lipschitz-stetige Funktionen.

Lineare Funktionen $x \mapsto ax + b$ sind global Lipschitz-stetig.

Die Funktion $x \mapsto |x|$ ist global Lipschitz-stetig.

Polynome wie $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ sind nur dann global Lipschitz-stetig, wenn sie auf beschränkte Intervalle definiert werden (oder wenn $a_n = 0$ für alle $n \geq 2$). Sie sind aber lokal Lipschitz-stetig. □

Beispiel 6.10. Nicht jede differenzierbare Funktion ist global Lipschitz-stetig, z.B.

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion ist allerdings lokal Lipschitz-stetig.

Nicht jede global Lipschitz-stetige Funktion ist differenzierbar, z.B.

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}.$$

□

Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf. *Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ eine stetige, in der zweiten Variablen lokal Lipschitz-stetige Funktion. Dann hat die Differenzialgleichung*

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right)$$

für f mit Anfangswert

$$y(x_0) = y_0$$

für alle $(x_0, y_0) \in D$ genau eine lokale Lösung

$$z : I \to \mathbb{R},$$

wobei I eine Umgebung von x_0 ist, so dass $f\left(x, z(x)\right) = z'(x)$ für alle $x \in I$.

Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf. *Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ eine stetige, in der zweiten Variablen global Lipschitz-stetige Funktion. Dann hat die Differenzialgleichung*

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right)$$

mit Anfangswert

$$y(x_0) = y_0$$

für f mit $(x_0, y_0) \in D$ genau eine globale Lösung.

Beispiel 6.11. Die Funktion $[0,1] \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht einmal lokal Lipschitz-stetig: denn ihre Ableitung ist unbeschränkt für $x \to 0$. Ihre Einschränkung auf $[a,1]$ ist aber global Lipschitz-stetig für alle $a > 0$.

Deshalb erfüllt das Cauchy-Problem

$$y'(x) = \sqrt{y(x)}, \qquad y(0) = 0,$$

die Bedingungen von keinem der Sätze von Picard–Lindelöf. Tatsächlich hat das Cauchy–Problem keine eindeutige Lösung: Sowohl die Funktion $x \mapsto 0$ als auch die Funktion $x \mapsto \frac{1}{4}\sqrt{x^2}$ sind (globale) Lösungen des Problems. Allgemeiner sieht man, dass sowohl $x \mapsto 0$ als auch – für alle $C > 0$ – $x \mapsto \frac{1}{4}(x - C)^2$ globale Lösungen der Differenzialgleichung

$$y'(x) = \sqrt{y(x)}, \qquad x \in [0,1]$$

sind. □

Beispiel 6.12. Ist $f(t,x) = p(t)x + q(t)$ für eine stetige Funktion $p : [a,b] \to \mathbb{R}$, so ist f stetig und für alle x, z gibt es eine Konstante $L_f = p(t)$ (die zwar von t, aber nicht von x und z abhängt) so dass

$$|f(t,x) - f(t,z)| = |p(t)x + q(t) - p(t)z - q(t)| = |p(t)x - p(t)z| = |p(t)|\,|x - z|.$$

Also ist f bzgl. der zweiten Variable global Lipschitz-stetig und somit erfüllt die Funktion f die Voraussetzungen des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard–Lindelöf und die Differenzialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) = p(t)y(t) + q(t)$$

hat für jede Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in [a,b]$) eine eindeutig bestimmte globale Lösung. □

Beispiel 6.13. F. Black und M. Scholes haben 1973 ein Modell für den Wert $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ einer Europäischen Option hergeleitet, das 1997 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften gekrönt wurde:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + rx\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - ru(x,t) = 0$$

wobei $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ die Ableitungen der Funktion u bzgl. der Variable x bzw. t sind, also

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t_0) := \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,t_0) - u(x_0,t_0)}{h}$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) := \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0,t_0+h) - u(x_0,t_0)}{h}.$$

Dabei bezeichnet man mit

- t die Zeit,
- x den Preis des Basiswertes,
- r, σ zwei phänomenologische Parameter: $r \equiv$ Zinssatz, $\sigma \equiv$ Volatilität.

Diese und ähnliche Differenzialgleichungen, in denen die Unbekannte eine Funktion zweier (oder mehrerer) Variablen ist, werden *partielle Differenzialgleichungen* genannt. Sie bilden ein breites und kompliziertes mathematisches Gebiet und werden in dieser Vorlesung nicht betrachtet. $\square$

KAPITEL 7

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Eine lineare homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung kann man wie

$$y'(t) = p(t)y(t) \tag{7.1}$$

auffassen, wobei $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist. Z.B. ist die Differenzialgleichung aus Beispiel 6.1 von dieser Form.

Anmerkung 7.1. Die Differenzialgleichung (7.1) heißt linear, weil jede lineare Kombination von Lösungen zu (7.1) auch wieder eine Lösung ist.

Wir suchen eine Lösung, die nirgendwo verschwindet. Diese Einschränkung wird am Ende aufgehoben. Um diese Differenzialgleichung zu lösen, teile beide Seiten von (7.1) durch $y(t)$ und erhalte die äquivalente Formulierung

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = p(t).$$

Nun kann man beide Seiten integrieren und erhalten, dass die Stammfunktionen der beiden Seiten übereinstimmen müssen. Diese sind $\log |y|$ bzw. $\int p(t)dt$, wobei $P := \int p(t)dt$ die Stammfunktion von p bezeichnet. Bekanntlich sind aber Stammfunktionen nur bis auf eine Konstante bestimmt, genauer gilt also die Gleichung

$$\log |y(t)| = \int_a^t p(s)ds + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Nach Exponentiation gilt

$$|y(t)| = e^{\log |y(t)|} = e^{\int_a^t p(s)ds + c} = e^{\int_a^t p(s)ds} e^c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$, also

$$|y(t)| = K e^{\int_a^t p(s)ds}$$

für ein $K > 0$, oder auch

$$y(t) = \pm K e^{\int_a^t p(s)ds}$$

für ein $K > 0$. Weil wir aber auch den Fall zulassen wollen, dass y doch verschwindet, erhalten wir schließlich die Formel

$$y(t) = K e^{\int_a^t p(s)ds}$$

für ein passendes $K \in \mathbb{R}$, das anhand der Anfangsbedingungen bestimmt werden soll. Also haben wir folgendes.

Satz 7.2. *Sei $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Das Cauchy-Problem*

$$y'(t) = p(t)y(t), \quad t \in [a, b], \qquad y(a) = y_0,$$

hat die einzige globale Lösung

$$y(t) = y_0 e^{P(t)}, \qquad t \in [a,b],$$

wobei P die Stammfunktion von p ist, also

$$P(t) := \int_a^t p(s)ds.$$

Beispiel 7.3. Die Differenzialgleichungen aus den Beispielen 6.1 und 6.4 erfüllen die Voraussetzungen des obigen Satzes für p konstant. □

Beispiel 7.4. Betrachte das Cauchy-Problem

$$y'(t) = ty(t), \quad t \geq 1, \qquad y(1) = 7.$$

Diese Differenzialgleichung ist linear und homogen, da man $p(t) = t$ setzen kann. Dann liefert der Satz 7.2 die globale Lösung

$$y(t) = 7e^{\int_1^t s ds} = 7e^{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}} = 7e^{\frac{1}{2}(t^2-1)}.$$

□

Beispiel 7.5. Betrachte das Cauchy-Problem

$$y'(t) = (t^3 + 4t^2 + 1)y(t), \quad t \geq 0, \qquad y(0) = 5.$$

Diese Differenzialgleichung ist linear und homogen, da man $p(t) = t^3 + 4t^2 + 1$ setzen kann. Dann liefert der Satz 7.2 die globale Lösung

$$y(t) = 5e^{\int_0^t (s^3+4s^2+1)ds} = 5e^{\frac{1}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + t}.$$

□

Beispiel 7.6. Betrachte das Cauchy-Problem

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t}, \quad t \geq 1, \qquad y(1) = 3.$$

Diese Differenzialgleichung ist linear und homogen, da man $p(t) = \frac{1}{t}$ setzen kann. Dann liefert der Satz 7.2 die globale Lösung

$$y(t) = 3e^{\int_1^t \frac{1}{s} ds} = 3e^{\log t - \log 1} = 3e^{\log t} = 3t.$$

□

Beispiel 7.7. Betrachte das Cauchy-Problem

$$y'(t) = \cos(t)y(t), \quad t \geq 0, \qquad y(0) = 2.$$

Diese Differenzialgleichung ist linear und homogen, da man $p(t) = \cos(t)$ setzen kann. Dann liefert der Satz 7.2 die globale Lösung

$$y(t) = 2e^{\int_0^t \cos(s)ds} = 2e^{\sin t - \sin 0} = 2e^{\sin t}.$$

□

Beispiel 7.8. Betrachte das Cauchy-Problem

$$y'(t) = \sqrt{t}y(t), \quad t \geq 0, \qquad y(0) = 10.$$

Diese Differenzialgleichung ist linear und homogen, da man $p(t) = \sqrt{t}$ setzen kann. Dann liefert der Satz 7.2 die Lösung

$$y(t) = 10e^{\int_0^t \sqrt{s}ds} = 10e^{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}.$$

□

Natürlich kann man auch Differenzialgleichungen betrachten, die nicht eine *Anfangs-*, sonder eine *Endebedingung* haben. Natürliche Änderungen sollen dabei durchgeführt werden.

Beispiel 7.9. Betrachte das Cauchy-Problem

$$y'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2}y(x), \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}], \qquad y(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

Diese Differenzialgleichung ist linear und homogen, da man $p(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ setzen kann. Dann liefert der Satz 7.2 die Lösung

$$y(x) = 1e^{\int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{1}{\cos^2(s)}ds} = e^{\tan(x) - \tan(\frac{\pi}{4})} = e^{\tan(x)-1}.$$

□

Durch die Methode der sogenannten *Variation der Konstanten* kann man auch die Lösungen von inhomogenen Differenzialgleichungen der Form

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t) \tag{7.2}$$

finden. Die Idee dabei ist, dass die allgemeine Lösung von (7.2) sich durch die Summe einer allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (d.h., von (7.1)) und einer einzigen Lösung der inhomogenen Gleichung auffassen lässt.

Anmerkung 7.10. Seien y_1 Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (7.2) und y_2 Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung (7.1). Dann ist auch ihre Summe $y_1 + y_2$ eine Lösung von (7.2).

Man verwendet den Ansatz, dass die Lösung von der Form

$$y(t) = K(t)e^{\int_a^t p(s)ds}$$

für eine Funktion $K(t)$ (statt für eine Konstante wie im homogenen Fall) ist.[1] Durch Ableiten erhält man

$$y'(t) = K(t)p(t)e^{\int_a^t p(s)ds} + K'(t)e^{\int_a^t p(s)ds} = p(t)y(t) + K'(t)e^{\int_a^t p(s)ds}$$

(die 2. Identität folgt daraus, dass $K(t)p(t)e^{\int_a^t p(s)ds}$ die allgemeine Lösung von (7.1) darstellt). Damit diese Funktion auch (7.2) löst soll gelten, dass

$$K'(t)e^{\int_a^t p(s)ds} = q(t),$$

also dass

$$K'(t) = q(t)e^{-\int_a^t p(s)ds},$$

[1] Das ist erstmal eine willkürliche Annahme: doch werden wir durch diese Annahme genau eine Lösung finden, und nach dem Beispiel 6.12 ist diese genau die einzige Lösung: somit erweist sich der Ansatz als keine Beschränkung der Allgemeinheit.

und das wird von der speziellen Lösung

$$K(t) = \int_a^t q(s)e^{-\int_a^s p(r)dr}ds$$

erfüllt.

Satz 7.11. *Seien $p, q : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Lösungen der Differenzialgleichung*

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t), \quad t \in [a, b],$$

sind alle und nur der Form

$$y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds} \left(\int_a^t e^{-\int_a^s p(r)dr} q(s)ds + C \right)$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist die einzige Lösung des Cauchy-Problems

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t), \quad t \in [a, b], \qquad y(a) = y_0,$$

durch

$$y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds} \left(\int_a^t e^{-\int_a^s p(r)dr} q(s)ds + y_0 \right)$$

gegeben.

Beispiel 7.12. Betrachte die Differenzialgleichung

$$y'(t) = y(t) + 1, \qquad t \geq 0.$$

Diese ist eine lineare inhomogene Gleichung mit $p(t) = q(t) = 1$, $t \geq 0$. Es gilt

$$\int_0^t p(s)ds = t$$

und somit liefert der Satz 7.2 die allgemeine Lösung

$$y(t) = e^t \left(\int_0^t e^{-s}ds + C \right) = e^t(-e^{-t} + 1 + C) = (C + 1)e^t - 1.$$

Tatsächlich gilt dann

$$y'(t) = (C + 1)e^t = ((C + 1)e^t - 1) + 1 = y(t) + 1,$$

also löst diese Funktion für alle $C \in \mathbb{R}$ die obige Differenzialgleichung. □

Beispiel 7.13. Betrachte die Differenzialgleichung

$$z'(t) = (1 - m)z(t) + (1 - m), \qquad t \geq 0.$$

Diese ist eine lineare inhomogene Gleichung mit $p(t) = q(t) = 1 - m$, $t \geq 0$, wobei $m \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\int_0^t p(s)ds = (1 - m)t$$

und somit liefert der Satz 7.2 die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{(1-m)t}\left(\int_0^t (1-m)e^{-(1-m)s}ds + C\right) \\ &= e^{(1-m)t}\left(-\,e^{-(1-m)s}\Big|_{s=0}^{s=t} + C\right) \\ &= e^{(1-m)t}\left(-e^{-(1-m)t} + 1 + C\right) \\ &= (C+1)e^{(1-m)t} - 1. \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} z'(t) &= (1-m)(C+1)e^{(1-m)t} \\ &= (1-m)\left((C+1)e^{(1-m)t} - 1 + 1\right) \\ &= (1-m)\left((C+1)e^{(1-m)t} - 1\right) + (1-m) \\ &= (1-m)z(t) + (1-m). \end{aligned}$$

□

Beispiel 7.14. Betrachte die lineare inhomogene Differenzialgleichung

$$y'(t) = ty(t) + e^{\frac{1}{2}t^2}, \qquad t \geq 1.$$

Dank Beispiel 7.5 weißt man, dass $y(t) = e^{\frac{1}{2}(t^2-1)}$ eine spezielle Lösung der assoziierten homogenen Gleichung ist. Dann liefert der Satz 7.11 die globale Lösung

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\frac{1}{2}(t^2-1)}\left(\int_1^t e^{-\frac{1}{2}(s^2-1)}e^{\frac{1}{2}(s^2)} + C\right) \\ &= e^{\frac{1}{2}(t^2-1)}\left(\int_1^t e^{-\frac{1}{2}} + C\right) \\ &= e^{\frac{1}{2}(t^2-1)}\left(e^{-\frac{1}{2}}(t-1) + C\right), \end{aligned}$$

wobei die Konstante C anhand der Anfangsbedingung bestimmt werden soll. Das ist möglich, denn z.B. ist $y(1) = C$. □

Beispiel 7.15. Betrachte die lineare inhomogene Differenzialgleichung

$$v'(t) = -(\rho u(t) + k)v(t) + \rho u(t), \qquad t \in [0, \infty)$$

aus dem Beispiel 6.3. Es handelt sich um eine lineare, inhomogene Differenzialgleichung 1. Ordnung. Dank dem Beispiel 6.12 sind die Voraussetzungen des globalen Satzes von Picard–Lindelöf erfüllt, falls u stetig ist. Dann liefert der Satz 7.2 die Lösung

$$y(t) = e^{-\int_0^t(\rho u(s)+k)ds}\left(\int_0^t e^{\int_0^s(\rho u(r)+k)dr}\rho u(s)ds + C\right)$$

für $C \in \mathbb{R}$. Ist z.B. $u(t) = t$ und $k = 0$, so bekommt man

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int_0^t (\rho s) ds} \left(\rho \int_0^t e^{\int_0^s (\rho r) dr} s ds + C \right) \\ &= e^{-\frac{\rho}{2} t^2} \left(\rho \int_0^t e^{\frac{\rho}{2} s^2} s ds + C \right). \end{aligned}$$

Weil für alle $m \in \mathbb{R}$ die Ketten- und Produktregel

$$\frac{d}{dx} e^{mx^2} = 2mxe^{mx^2}$$

liefert, hat man

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\frac{\rho}{2} t^2} \left(\rho \int_0^t e^{\frac{\rho}{2} s^2} s ds + C \right) \\ &= e^{-\frac{\rho}{2} t^2} \left(e^{\frac{\rho}{2} s^2} \Big|_{s=0}^{s=t} + C \right) \\ &= e^{-\frac{\rho}{2} t^2} \left(e^{\frac{\rho}{2} t^2} - 1 + C \right). \end{aligned}$$

Ist stattdessen $u(t) = w \in \mathbb{R}$ – eine Konstante – so bekommt man

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int_0^t (\rho w + k) ds} \left(\int_0^t e^{\int_0^s (\rho w + k) dr} \rho w ds + C \right) \\ &= e^{-(\rho w + k)t} \left(\rho w \int_0^t e^{(\rho w + k)s} ds + C \right) \\ &= e^{-(\rho w + k)t} \left(\frac{\rho w}{\rho w + k} e^{(\rho w + k)t} - \frac{\rho w}{\rho w + k} + C \right) \\ &= \frac{\rho w}{\rho w + k} + \left(C - \frac{\rho w}{\rho w + k} \right) e^{-(\rho w + k)t}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 7.16. Betrachte die Gleichung

$$y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + t^5, \qquad t \in [2, \infty).$$

Dank Beispiel 7.6 weißt man, dass $y(t) = e^{\log t - \log 2} = \frac{t}{2}$ eine spezielle Lösung der assoziierten homogenen Gleichung ist. Dann liefert der Satz 7.11 die Lösung

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{t}{2} \left(\int_2^t e^{-\log s + \log 2} s^5 ds + C \right) \\ &= \frac{t}{2} \left(\int_2^t \frac{2}{s} s^5 ds + C \right) \\ &= \frac{t}{2} \left(2 \int_2^t s^4 ds + C \right) \\ &= \frac{t}{2} \left(\frac{2}{5} s^5 \Big|_{s=2}^{s=t} + C \right). \end{aligned}$$

Wie gehabt soll die Konstante C durch die Angansbedingung bestimmt werden. $\square$

Beispiel 7.17. Betrachte die Gleichung

$$y'(t) = \frac{1}{(\cos(t))^2} y(t) + e^{\tan(x)}, \qquad t \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Dank Beispiel 7.7 weißt man, dass $y(t) = e^{\tan(t)-1}$ eine spezielle Lösung der assoziierten homogenen Gleichung ist. Dann liefert der Satz 7.11 die Lösung

$$y(t) = e^{\tan(t)-1} \left(\int_0^t e^{1-\tan(s)} e^{\tan(s)} ds + C \right) = e^{\tan(t)-1} (et + C) = te^{\tan(t)} + Ce^{\tan(t)-1}.$$

$\square$

Viele Modelle in den Naturwissenschaften lassen sich durch Differenzialgleichungen der Form

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t)(y(t))^m \tag{7.3}$$

beschreiben, wobei $m \neq 1$, sonst wird (7.3) einfach zu

$$y'(t) = \big(p(t) + q(t)\big)y(t),$$

und $m \neq 0$, sonst wird (7.3) einfach zu

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t).$$

Diese heißen *Bernoullische Differenzialgleichungen.*

Solche Differenzialgleichungen 1. Ordnung sind *nichtlinear*, denn sie enthalten den Term $q(x)(y(t))^m$. Im Allgemeinen heißt eine Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt} y(t) = F(t, y(t))$$

dann *linear*, wenn F der Form

$$F(t, y(t)) = p(t)y(t) + q(t)$$

ist, d.h., wenn y nur als 1. Potenz in F vorkommt. Sonst heißt eine Differenzialgleichung 1. Ordnung *nichtlinear.*

Beispiel 7.18. Die Differenzialgleichung aus dem Beispiel 6.2 ist eine nichtlineare Bernoullische Differenzialgleichung, mit $m = 2$. $\square$

Es gibt i.A. keine bekannte Lösung für *alle* nichtlinearen Differenzialgleichungen, aber für manche Klassen von Differenzialgleichungen.

Ähnlich wie im Fall einer linearen Differenzialgleichung kann man versuchen, die Gleichung

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad t \in [a, b],$$

zu lösen. Denn ist

$$\frac{1}{f(t)} = F'(t)$$

für eine passende Funktion F, so gilt

$$1 = \frac{y'(t)}{f(y(t))} = F'(y(t))y'(t) = \frac{d}{dt}(F \circ y(t)).$$

Durch Integration der beiden Seiten erhält man

$$t - C = (F \circ y)(t).$$

Ist die Funktion F invertierbar mit Inverse γ, so gilt

$$y(t) = \gamma(t - C)$$

für ein $C \in \mathbb{R}$.

Satz 7.19. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Hat $\frac{1}{f}$ eine Stammfunktion g und gibt es eine Funktion γ so dass $\gamma(g(x)) = x$ für alle $x \in [a, b]$, so ist*

$$y(t) = \gamma(t - C),$$

für ein $C \in \mathbb{R}$, die einzige lokale Lösung der Differenzialgleichung

$$y'(t) = f(y(t)).$$

Beispiel 7.20. Betrachte die Gleichung

$$y'(t) = y^3(t), \qquad t \geq 0.$$

Ist $f(x) = x^3$, so kann man die Gleichung umformulieren zu

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad t \in [0, \infty).$$

Die Funktion f ist dabei keine globale Lipschitz-stetige Funktion, aber eine lokale: nach dem Satz von Picard–Lindelöf kann man also nur die Existenz und Eindeutigkeit einer *lokalen* Lösung erwarten. Setze $g(x) = -\frac{1}{2x^2} = -\frac{x^{-2}}{2}$. Es gilt $g'(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ und somit

$$1 = \frac{y'(t)}{y^3(t)} = \frac{d}{dt}(g \circ y(t)) = -\frac{d}{dt}\frac{1}{2y^2(t)}$$

und daher

$$t = \int_0^t \frac{y'(s)}{y^3(s)} ds = -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\frac{1}{y^2(s)} ds = -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2(t)} + C.$$

Somit gilt

$$y^2(t) = -\frac{1}{2(t - C)} = \frac{1}{2(C - t)},$$

d.h.,

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2(C - t)}} = (2(C - t))^{-\frac{1}{2}}.$$

(Die Funktion g ist nämlich invertierbar mit Inverse $\gamma(z) = \frac{1}{\sqrt{-2z}}$.) Tatsächlich gilt

$$y'(t) = -\frac{1}{2}(2(C - t))^{-\frac{3}{2}}(-2) = (2(C - t))^{-\frac{3}{2}} = y^3(t).$$

Die Konstante C wird von der Anfangsbedingung, etwa $y(0) = y_0$, bestimmt: somit ist

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{y_0^{-2} - 2t}}$$

die einzige Lösung des Cauchy-Problems

$$y'(t) = y^3(t), \quad t \geq 0, \qquad y(0) = y_0.$$

Diese Lösung ist nur dann definiert, wenn $y_0^{-2} - 2t > 0$, also wenn $t < \frac{1}{2}y_0^{-2}$, also ist sie eine lokale Lösung. □

Beispiel 7.21. Betrachte die Gleichung

$$y'(t) = \frac{1}{y(t)}, \qquad t > 0.$$

Ist $f(x) = x^{-1}$, so kann man die Gleichung umformulieren als

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad t > 0.$$

Die Funktion f ist dabei keine globale Lipschitz-stetige Funktion, aber eine lokale: nach dem Satz von Picard–Lindelöf kann man also nur die Existenz und Eindeutigkeit einer *lokalen* Lösung erwarten. Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist die Identität, also $\frac{1}{f(x)} = x$, ihre Stammfunktion ist durch $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ gegeben, welche invertierbar ist mit Inverse $\gamma(x) = \sqrt{2x}$. Nach dem Satz 7.19 ist die Lösung der Differenzialgleichung durch $y(t) = \sqrt{2t - C}$ gegeben. Tatsächlich gilt

$$y'(t)y(t) = 1,$$

wobei

$$y'(t)y(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y(t))^2,$$

also

$$\frac{d}{dt}(y(t))^2 = 2$$

und durch Integration erhält man

$$(y(t))^2 = 2t - C,$$

also

$$y(t) = \sqrt{2t - C}.$$

□

Betrachte wieder eine Bernoullische Differenzialgleichung, also (7.3). Dann erhält man

$$\frac{y'(t)}{(y(t))^m} = \frac{p(t)}{(y(t))^{m-1}} + q(t), \qquad t \in [a, b].$$

Durch die Transformation

$$z(t) := (y(t))^{1-m} = \frac{1}{(y(t))^{m-1}}$$

erhält man

$$z'(t) := (1 - m)\frac{y'(t)}{(y(t))^m}$$

und somit löst die Funktion z die lineare inhomogene Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{z'(t)}{1 - m} = p(t)z(t) + q(t), \qquad t \in [a, b].$$

Beispiel 7.22. Betrachte den Spezialfall $p(t) = q(t) = 1$, $t \geq 0$, also die Differenzialgleichung

$$y'(t) = y(t) + (y(t))^m, \qquad t \geq 0. \tag{7.4}$$

Die Transformation

$$z(t) := (y(t))^{1-m} = \frac{1}{(y(t))^{m-1}}$$

liefert

$$z'(t) = (1-m)z(t) + (1-m), \qquad t \geq 0.$$

Nach dem Beispiel (7.13) wissen wir, dass die allgemeine Lösung der Gleichung der Form

$$z(t) = (C+1)e^{(1-m)t} - 1$$

ist. Somit ist

$$y(t) = \left((C+1)e^{(1-m)t} - 1\right)^{\frac{1}{1-m}}$$

die allgemeine Lösung von 7.4. Für $m = 2$ man erhält z.B.

$$y(t) = \frac{e^t}{C+1-e^t}.$$

Tatsächlich ist

$$y'(t) = \frac{e^t(C+1)}{(C+1-e^t)^2} = \frac{e^t}{C+1-e^t} + \frac{e^{2t}}{(C+1-e^t)^2} = y(t) + (y(t))^2.$$

□

Allgemeiner kann man die Theorie der linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung anwenden: nach dem Satz 7.2 erhält man

$$z(t) = e^{(1-m)\int_a^t p(s)ds}\left(\int_a^t e^{(m-1)\int_a^s p(r)dr}(1-m)q(s)ds + C\right) = \frac{-\int_a^t e^{(m-1)\int_a^s p(r)dr}(m-1)q(s)ds + C}{e^{(m-1)\int_a^t p(s)ds}}.$$

Nun genügt es zu merken, dass nach Konstruktion[2]

$$y(t) = (z(t))^{\frac{1}{1-m}} = \frac{1}{\sqrt[m-1]{z(t)}},$$

d.h.

$$y(t) = \left(\frac{e^{(m-1)\int_a^t p(s)ds}}{-\int_a^t e^{(m-1)\int_a^s p(r)dr}(m-1)q(s)ds + C}\right)^{\frac{1}{m-1}} = \sqrt[m-1]{\frac{e^{(m-1)\int_a^t p(s)ds}}{-\int_a^t e^{(m-1)\int_a^s p(r)dr}(m-1)q(s)ds + C}}.$$

Satz 7.23. *Seien $p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Sei $m \neq 1$. Die Lösungen der Differenzialgleichung*

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t)(y(t))^m$$

sind alle und nur der Form

$$y(t) = \frac{e^{\int_a^t p(s)ds}}{\sqrt[m-1]{-\int_a^t e^{(m-1)\int_a^s p(r)dr}(m-1)q(s)ds + C}},$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

[2]Hier nutzt man die Konvention, dass $\sqrt[1]{x} = x$ und $\sqrt[-1]{x} = \frac{1}{x}$.

Anmerkung 7.24. Im Spezialfall $m = 2$ liefert der Satz 7.23 für die Differenzialgleichung

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t)(y(t))^2$$

die allgemeine Lösung

$$y(t) = \frac{e^{\int_a^t p(s)ds}}{C - \int_a^t e^{\int_a^s p(r)dr} q(s)ds}.$$

Beispiel 7.25. Betrachte wieder die Differenzialgleichung

$$\frac{dN}{dt}(t) = \rho N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{\kappa}\right) = \rho N(t) - \frac{\rho}{\kappa}(N(t))^2$$

aus dem Beispiel 6.2. Das ist eine Bernoullische Gleichung mit $m = 2$, $p(x) = \rho$ und $q(x) = -\frac{\rho}{\kappa}$ für alle $t \geq 0$. Somit liefern der Satz 7.23 und die Anmerkung 7.24 die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{e^{\int_0^t \rho ds}}{C + \int_0^t e^{\int_0^s \rho dr} \frac{\rho}{\kappa} ds} \\ &= \frac{e^{\rho t}}{C + \frac{1}{\kappa} \int_0^t e^{\rho s} \rho ds} \\ &= \frac{e^{\rho t}}{C + \frac{1}{\kappa}\, e^{\rho s}\big|_{s=0}^{s=t}} \\ &= \frac{e^{\rho t}}{C + \frac{1}{\kappa}\left(e^{\rho t} - 1\right)}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 7.26. Die Wirtschaftswissenschaftler Robert Merton Solow und Trevor Swan haben 1956 ein Modell für das Wachstum entwickelt. Dafür hat Solow 1987 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhalten. Bezeichnet k den Kapitalstock pro Kopf in einem Land (idealerweise ohne Wirtschaftsbeziehungen mit dem Ausland), so lautet ihr Modell

$$k'(t) = f(k(t)) - \delta k(t),$$

wobei meistens gilt

$$f(x) = x^\alpha$$

für ein $\alpha \in (0, 1)$, die sogenannte Produktionselastizität des Kapitals. Diese ist eine Bernoullische Differenzialgleichung mit $p(t) = -\delta$ und $q(t) = 1$ für alle $t \in [0, \infty)$ und mit $m = \alpha$. So liefert der Satz 7.23 die Lösungen

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{e^{-\int_0^t \delta ds}}{\left(-\int_0^t e^{-(\alpha-1)\int_0^s \delta dr}(\alpha - 1)ds + C\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \\ &= \frac{e^{-\delta t}}{\left(-\int_0^t e^{-(\alpha-1)\delta s}(\alpha - 1)ds + C\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \\ &= \frac{e^{-\delta t}}{\left(\frac{1}{\delta} e^{(1-\alpha)\delta s} - \frac{1}{\delta} + C\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \end{aligned}$$

für ein $C \in \mathbb{R}$.

Schließlich betrachten wir die sogenannten **Riccati-Gleichungen**, d.h. nichtlineare Differenzialgleichungen der Form

$$y'(t) = f_0(t) + f_1(t)y(t) + f_2(t)(y(t))^2, \qquad t \in [a,b], \tag{7.5}$$

wobei $f_0, f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und sowohl $f_0(t) \neq 0$ als auch $f_2(t) \neq 0$ (sonst wäre (7.5) eine herkömmliche Bernoullische bzw. lineare inhomogene Differenzialgleichung) für alle t. Die Grundannahme ist, dass man eine spezielle Lösung dieser Gleichung schon kennt, etwa $\tilde{y}$. Durch die Transformation

$$z(t) = \frac{1}{y(t) - \tilde{y}(t)}$$

erhält man

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \frac{1}{z(t)} \qquad \text{und somit} \qquad y'(t) = \tilde{y}'(t) - \frac{z'(t)}{(z(t))^2}.$$

Somit ist y genau dann eine Lösung von (7.5), wenn z eine Lösung der linearen inhomogenen Differenzialgleichung

$$z'(t) = -\left(f_1(t) + 2f_2(t)\tilde{y}(t)\right) z(t) - f_2(t), \qquad t \in [a,b],$$

ist (insbesondere hängen z und somit y nicht von f_0 ab!). Wie gehabt kann man diese Differenzialgleichung tatsächlich lösen: es gilt nämlich

$$z(t) = e^{-\int_a^t (f_1(s)+2f_2(s)\tilde{y}(s))ds} \left(- \int_a^t e^{\int_a^s (f_1(r)+2f_2(r)\tilde{y}(r))ds} f_2(s)ds + C \right).$$

Satz 7.27. *Seien $f_0, f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, von denen keine identisch verschwindet. Sei eine spezielle Lösung $\tilde{y}$ von* (7.5) *bekannt. Dann ist*

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \frac{e^{\int_a^t (f_1(s)+2f_2(s)\tilde{y}(s))ds}}{C - \int_a^t e^{\int_a^s (f_1(r)+2f_2(r)\tilde{y}(r))dr} f_2(s)ds}, \qquad t \in [a,b],$$

die allgemeine Lösung von (7.5), *für ein $C \in \mathbb{R}$.*

Beispiel 7.28. Betrachte die Riccati-Gleichung

$$y'(t) = t^3 + \frac{2}{t}y(t) - \frac{1}{t}y^2(t), \qquad t \geq 1.$$

Bekommt man den Hinweis, dass die Funktion

$$\tilde{y}(t) = -t^2$$

eine spezielle Lösung der obigen Differenzialgleichung ist, so kann man den Satz 7.27 anwenden mit $f_0(t) = t^3$, $f_1(t) = \frac{2}{t}$ und $f_2(t) = -\frac{1}{t}$. Insbesondere gilt $(f_1 + 2f_2\tilde{y})(t) = 2(\frac{1}{t} + t)$ für alle $t \geq 1$. Die Stammfunktion ist

$$\int_1^t (f_1 + 2f_2\tilde{y})(s)ds = \int_1^t 2(\frac{1}{s} + s)ds = 2\log t + t^2 - 2.$$

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
y(t) &= -t^2 + \frac{e^{2\log t + t^2 - 2}}{C + \int_1^t e^{2\log s + s^2 - 2} \frac{1}{s} ds} \\
&= -t^2 + \frac{t^2 e^{t^2-2}}{C + \int_1^t s e^{s^2-2} ds} \\
&= -t^2 + \frac{t^2 e^{t^2-2}}{C + \int_1^t \frac{1}{2} \frac{d}{ds} e^{s^2-2} ds} \\
&= -t^2 + \frac{t^2 e^{t^2-2}}{C + \frac{1}{2}\left(e^{t^2-2} - e^{-1}\right)}.
\end{aligned}
$$

□

KAPITEL 8

Differenzialgleichungen höherer Ordnung

Die höheren Ableitungen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ werden für $T \in [a, b]$ rekursiv durch

$$f'(T) := \frac{df}{dt}(T) = \lim_{h\to 0} \frac{f(T+h) - f(t)}{h},$$

$$f^{(n)}(T) := \frac{d^n f}{dt^n}(T) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(T+h) - f^{(n-1)}(t)}{h},$$

definiert, $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 8.1. Freier Fall eines Körpers nach den Gesetzen von Isaac Newton (1687): „Die Änderung der Bewegung einer Masse ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“ Ist also $z(t)$ die Höhe eines fallenden Körpers der Masse m zur Zeit t (mit $z(0) = 0$), so gilt

$$m\frac{d^2 z}{dt^2}(t) + \rho\frac{dz}{dt}(t) = mg,$$

wobei ρ der Luftwiderstandkoeffizient ist. Man beachte, dass der Term mg weder von z noch von t abhängt. □

Beispiel 8.2. Ein harmonischer Oszillator ist ein physikalisches System, bei dem in jedem Punkt einer Kraft unterliegt, die in Richtung eines festen Punktes (des “Ruhepunktes”) zeigt. Ist also $z(t)$ die Höhe eines Körpers der Masse m zur Zeit t (mit $z(0) = 0$), so gilt

$$m\frac{d^2 z}{dt^2}(t) + kz(t) = 0,$$

wobei k eine Federkonstante ist. □

Beispiel 8.3. Fall eines Körpers, der von einem Feder gebremst wird (wie beim Bungee-Jumping). Ist also $z(t)$ die Höhe eines fallenden Körpers der Masse m zur Zeit t (mit $z(0) = 0$), so gilt

$$m\frac{d^2 z}{dt^2}(t) + \rho\frac{dz}{dt}(t) + kz(t) = mg,$$

wobei ρ der Luftwiderstandkoeffizient und k eine Federkonstante sind. □

Eine Differenzialgleichung

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

heißt *Differenzialgleichung* n. Ordnung. Diese Differenzialgleichung heißt *linear*, falls alle Ableitungen von y jeweils als 1. Potenz in F vorkommen, sonst heißt sie *nichtlinear*. Eine lineare Differenzialgleichung n. Ordnung heißt *inhomogen*, wenn F der Form

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = F_0(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) + F_1(t)$$

ist, wobei $F_1 \not\equiv 0$, sonst heißt sie *homogen*.

Jede lineare Differenzialgleichung n. Ordnung, etwa

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

mit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, lässt sich folgendermaßen auf eine Gleichung 1. Ordnung reduzieren. Führe neue künstliche Unbekannte durch

$$u_k(t) := y^{(k)}(t), \qquad 0 \leq k \leq n.$$

ein (Dabei gilt die Konvention, dass $y^{(0)}(t) = y(t)$).

Dann gilt offensichtlich $u_k'(t) = u_{k+1}(t)$, und somit kann man die Gleichung folgendermaßen umformulieren:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}(t) \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}(t) \\ u_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix},$$

oder kompakter

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) + F(t), \tag{8.1}$$

wobei

$$\mathbf{u}'(t) := \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \ldots \\ u_{n-1}(t) \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

und

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

und

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich also um eine *vektorwertige* Differenzialgleichung 1. Ordnung. Eine solche Gleichung nennt man üblicherweise *System von n Differenzialgleichungen*. Ihre Lösungen werden formal durch die Variation der Konstanten gegeben: Jedes $C \in \mathbb{R}^n$ liefert durch

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA}\left(\int_0^t F(s)e^{-sA}ds + C\right)$$

eine Lösung des Problems – vorausgesetzt, man kann dem Exponentialterm e^{tA} ein Sinn geben. (Noch allgemeiner liefert

$$\mathbf{u}(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}\left(\int_0^t F(s)e^{-\int_0^s A(r)dr}ds + C\right)$$

eine Lösung der Gleichung $\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t) + F(t)$). Insbesondere benötigt eine Differenzialgleichung n. Ordnung n Anfangsbedingungen, damit eine eindeutige Lösung bestimmt werden kann.

Während ein solches Matrixexponential tatsächlich wohldefiniert ist, ist seine Berechnung für allgemeine Matrizen beinahe unmöglich. Es gibt aber einige spezielle Matrizenklassen, für die das Matrixexponential bekannt ist:

- Ist A diagonal, so besteht e^{tA} aus den Exponentialen der Diagonaleinträge von A, also

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\alpha_n}. \end{pmatrix}$$

- Ist A *nilpotent*, etwa $A^{k+1} = 0$, so gilt

$$e^{tA} = \mathrm{Id} + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}t^kA^k.$$

  Z.B. gilt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestehen aber die Einträge der Matrix aus global Lipschitz-stetigen Funktionen, so liefert der Satz von Picard–Lindelöf die Existenz einer eindeutigen globalen Lösung. Im Allgemeinem gibt es keine einfache Möglichkeit, das Matrixexponential zu bestimmen und somit die Lösung einer vektorwertigen Differenzialgleichung (und insbesondere die Lösung einer skalaren Differenzialgleichung höherer Ordnung) zu bestimmen. Allerdings ist es oft trotzdem nützlich, das Verhalten der Lösung für große t (typischerweise, das Langzeitverhalten) zu kennen.

Stabilitätsatz von Ljapunow. *Haben alle Eigenwerte einer Matrix A strikt negativen Realteil, so ist das System stabil, d.h., das System erfüllt die Lösung u von*

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t)$$

die Ungleichung

$$\max_{1\le i\le n} |u_i(t)| \le \max_{1\le i\le n} |u_i(0)|e^{-\beta t} \tag{8.2}$$

für ein $\beta > 0$.

Beispiel 8.4. Die Bedeutung des Stabilitätsatzes von Ljapunow liegt darin, Aussagen über Differenzialgleichungen treffen zu können, deren Lösung nicht explizit bekannt ist. Leider kann der Satz nur bei linearen Differenzialgleichungen angewendet werden. Ein Beispiel eines Systems zweier nichtlinearen Differenzialgleichungen ist das Bevölkerungsmodell von Alfred J. Lotka und Vito Volterra (1925–26). Bezeichnet $M(t), N(t)$ die Anzahl zweier konkurrierender Arten (etwa Beute- bzw. Raubtiere), so besagt das Modell, dass

$$M'(t) = M(t)\left(\alpha - \beta N(t)\right) \qquad \text{und} \qquad N'(t) = N(t)\left(\gamma - \delta M(t)\right).$$

Dieses System lässt sich nicht in Matrixform (8.1) schreiben. □

Beispiel 8.5. Die Differenzialgleichung aus dem Beispiel 8.3 ist eine lineare inhomogene (wegen des Terms g) Differenzialgleichung 2. Ordnung. Sie kann in Matrixform (8.1) gebracht werden, indem man die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\rho}{m} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

betrachtet: damit kann das Problem als

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) + F(t), \qquad t \geq 0,$$

umformuliert werden. Die Eigenwerte dieser Matrix sind 0 und $\frac{-\rho}{m}$, also kann man nicht erwarten, dass (8.2) gilt für das vereinfachte Modell mit $F(t) = 0$. Mit Methoden, die in dieser Vorlesung nicht verfügbar sind, kann man tatsächlich die Lösung angeben. Ist z.B. $k = 0$ wie im Beispiel 8.1 (freier Fall), so kann man berechnen, dass die Lösung durch

$$z(t) = z_0 + \frac{m}{\rho}\left(1 - e^{-\frac{\rho}{m}t}\right) v_0,$$

wobei v_0, z_0 die Anfangsgeschwindigkeit und -ortung des Körpers bezeichnen. (Ist z.B. $z_0 = 0$, so ist die Lösung durch

$$z(t) = \frac{m}{\rho}\left(v_0 - \frac{mg}{\rho}\right)\left(1 - e^{-\frac{\rho}{m}t}\right) + \frac{mg}{\rho}$$

gegeben.)

Im allgemeinen sind die Eigenwerte der im Beispiel 8.3 eingeführten Matrix A durch

$$-\frac{\rho}{2m} \pm \frac{\sqrt{\rho^2 - 4mk}}{2m}$$

gegeben werden. Bei bekannten Werten von k, ρ kann man also den Satz von Ljapunow leicht anwenden. Ist z.B. $k = 0$ oder $\rho = 0$, haben alle Eigenwerte Realteil 0. Ist aber z.B. $\rho = 2$ und $k = m = 1$, so sind beide Eigenwerte gleich $-\frac{\rho}{2} = -1$, also lässt sich der Satz anwenden und das System ist stabil. □

Beispiel 8.6. Betrachte das System linearer Differenzialgleichungen

$$x'(t) = -3x(t) + 5y(t) \qquad \text{und} \qquad y'(t) = 2x(t) - 4y(t), \qquad t \geq 0.$$

Es kann in Matrixform (8.1) gebracht werden, indem man die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

betrachtet: damit kann das Problem als

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t), \qquad t \geq 0,$$

umformuliert werden, wobei

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung des Systems kann zwar numerisch bestimmt werden, das Verfahren ist aber aufwändig – und die Lösung sehr unübersichtlich. Man berechnet aber leicht, dass die Eigenwerte der Funktion

$$-\frac{1}{2}(7 - \sqrt{41}) \qquad \text{und} \qquad -\frac{1}{2}(7 + \sqrt{41})$$

sind, also beide strikt negativ. Somit kann man folgern, dass (8.2) gilt, insbesondere erfüllt die Lösung $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. □

Literaturverzeichnis

[1] Louis Brickman, *Mathematical Introduction to Linear Programming and Game Theory*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[2] Vaclav Chvátal, *Linear Programming*, Freeman, New York, 1983.

[3] Harro Heuser, *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, Viewerg+Teubner, Wiesbaden, 2009.

[4] Delio Mugnolo, *Graphentheorie*, Universität Ulm, 2009.

[5] Ulrich Rieder, *Einführung in Operations Research*, Universität Ulm, 2006.

[6] Friedmar Schulz, *Mathematische Methode für Ökonomen*, Universität Ulm, 2006.

[7] Francis Spufford, *Red Plenty*, Faber and Faber, 2001.

[8] Robert J. Vanderbei, *Linear Programming: Foundations and Extensions*, Princeton University, 2001.

[9] Elena Sergeevna Venttsel, *Elements of Game Theory*, Mir, Moskau, 1980.

[10] Hans-Jürgen Zimmermann, *Operations research*, Vieweg, Wiesbaden, 2008.