Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
22. Juni 2012

Analysis I
Probeklausur (120 Minuten)

1. Aufgabe (3+3+4=10 Punkte)

(a) Man prüfe die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{4n^3+2^{n+1}}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

(b) Man prüfe die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ auf Konvergenz.

(c) Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k}\, x^k$ für $|x| < 1$ absolut konvergiert und für $|x| \geq 1$ divergiert.

2. Aufgabe (6 Punkte)
Man beweise mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{(2n-1)\cdot 2n \cdot (2n+1)}{6}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt.

3. Aufgabe (6+3=9 Punkte)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq b \leq a$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden rekursiv definiert durch

$$a_0 := a,\ b_0 := b,\ a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \ \text{ für alle } \ n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

Man zeige:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}:\ b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

4. Aufgabe (6 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen, die keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$ besitzt. Man beweise, dass die Folge uneigentlich gegen ∞ konvergiert.

5. Aufgabe (6 Punkte)
Man beweise oder widerlege folgende Aussage:
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen und $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist $a + b$ Häufungspunkt der Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Aufgabe (7 Punkte)
Es sei $M := \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\}$. Man zeige, dass $\min(M) = \frac{3}{2}$ und 2 obere Schranke von M ist.

Hinweis: Man benutze die Bernoullische Ungleichung und $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ (was ebenfalls nachzuweisen ist!).

7. Aufgabe (6+3=9 Punkte)
Es sei $M := \{a, b, c\}$ eine Menge mit 3 Elementen. Auf $M \times M$ wird durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) :\Leftrightarrow (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \vee (a_1, a_2) = (b_2, b_1)$$

für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in M \times M$ eine Relation $\sim$ definiert.

(a) Man zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Man bestimme die Äquivalenzklassen von $\sim$.