Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
16. Juli 2012

Analysis I
13. Übungsblatt (Reine Trainingsserie, keine Abgabe)

1. Aufgabe
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

(a) Man beweise, dass f stetig ist.

(b) Man zeige, dass f in allen Punkten differenzierbar ist und bestimme die Ableitungsfunktion. Desweiteren zeige man, dass f' in 0 nicht stetig ist.

2. Aufgabe
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiter gelte

$$f(a) = 0,\ f(b) > 0,\ f'(b) < 0$$

Man beweise, dass $\xi \in (a, b)$ existiert mit $f'(\xi) = 0$.

Hinweis: Man zeige zunächst mit Hilfe der Definition der Ableitung, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert mit $f(x_0) > f(b)$.

3. Aufgabe
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\lambda \in \mathbb{R}$. Weiterhin gelte

$$f'(x) = \lambda f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } f(0) = 1 .$$

Man beweise, dass dann

$$f(x) = \exp(\lambda x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Man betrachte die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) := \exp(-\lambda x)f(x)$.

4. Aufgabe
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \frac{4x}{(x+1)^2}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Man zeige durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ für die $n-$te Ableitung von f

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{4(x-n)}{(x+1)^{n+2}}$$

gilt.