Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
04. Mai 2012

Analysis I
3. Übungsblatt

Abgabe: *Freitag, 11. Mai 2012, 9:00 Uhr in der Vorlesung*

1. Aufgabe (4+4+3=11 Punkte)
Seien E und F beliebige Mengen und $f : E \to F$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) f injektiv $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Abbildung, die linke Inverse, $g : F \to E$ mit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in E$.

(b) f surjektiv $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Abbildung, die rechte Inverse, $h : F \to E$ mit $f(h(y)) = y$ für alle $y \in F$.

(c) Ist f sowohl links als auch rechts invertierbar, so ist f bijektiv und die linke und die rechte Inverse stimmen überein (Diese Abbildung ist dann gleich der Umkehrabbildung von f (kein Beweis nötig)).

2. Aufgabe (2+2+2=6 Punkte)
X, Y, Z seien Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ seien Abbildungen. Man zeige:

(a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Sind f und g bijektiv, so existiert die Umkehrabbildung $(g \circ f)^{-1} : Z \to X$ von $g \circ f$ und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3. Aufgabe ($5 \times 2 = 10$ Punkte)
Welche der folgenden Abbildungen sind surjektiv, injektiv, bijektiv?

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) := n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := -4x - 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(c) $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},\ f(x) := |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Hierbei ist $|x| := x$, falls $x \geq 0$ gilt, und $|x| := -x$, falls $x < 0$ gilt.)

(d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x, y) := (x + y, x - y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(e) Sei $M := \{0, 1, 2, 3\}, N := M \cup \{4\}$ und $f : \mathcal{P}(M) \to N,\ f(A) := |A|$ für alle $A \in \mathcal{P}(M)$

4. Aufgabe (2+3+3=8 Punkte)

(a) Seien E und F beliebige Mengen und $f : E \to F$ eine Abbildung. Man zeige, dass die Abbildung $\tilde{f} : E \to Bild(f),\ \tilde{f}(x) := f(x)$ für alle $x \in E$, surjektiv ist (*Hierbei ist* $Bild(f) := \{y \in F : \exists x \in E : f(x) = y\}$ die Bildmenge von f).

(b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n) := n^2 - 8n + 16$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

  (i) Man zeige, dass tatsächlich $g(n) \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

  (ii) Man gebe einen geeigneten Definitionsbereich $D \subset \mathbb{N}$ an, so dass die Einschränkung $\tilde{g} : D \to \mathbb{N}$ von g auf D injektiv ist und $Bild(\tilde{g}) = Bild(g)$ gilt.

5. Aufgabe (4+3+3=10 Punkte)
Es sei M eine Menge und $\leq$ eine Halbordnung auf M. Ein Element $x \in M$ heißt **Minimum** bzw. **Maximum** von M, falls $x \leq y$ für alle $y \in M$ bzw. $y \leq x$ für alle $y \in M$ gilt.
Ein Element $x \in M$ heißt **minimales Element** von M, falls für alle $y \in M$ die Implikation $(y \leq x \Rightarrow y = x)$ gültig ist. Ein Element $x \in M$ heißt **maximales Element** von M, falls für alle $y \in M$ die Implikation $(x \leq y \Rightarrow y = x)$ gültig ist.

Seien $M := \{0, 1, 2, 3\}$ und $\mathcal{F} := \{f : N \to M : N \subset M \wedge |N| \geq 2\}$. Auf $\mathcal{F}$ sei die Relation $\leq$ erklärt durch

$$f_1 \leq f_2 :\Leftrightarrow N_1 \subset N_2 \wedge \forall x \in N_1 : f_1(x) = f_2(x)$$

für alle $f_1 : N_1 \to M, f_2 : N_2 \to M \in \mathcal{F}$. (Grob gesprochen ist also eine Funktion f_1 kleiner oder gleich einer anderen Funktion f_2, wenn f_1 die Einschränkung von f_2 auf einen "kleineren" Definitionsbereich ist.)

(a) Man zeige, dass $\leq$ eine Halbordnung auf $\mathcal{F}$ ist.

(b) Besitzt $\mathcal{F}$ ein Minimum? Ist $\leq$ total?

(c) Man bestimme die Menge aller minimalen Elemente von $\mathcal{F}$.