Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
11. Mai 2012

Analysis I
4. Übungsblatt

Abgabe: *Freitag, 18. Mai 2012, 9:00 Uhr in der Vorlesung*

1. Aufgabe (9 Punkte)
Es sei M eine Menge. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) M ist unendlich, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert eine Teilmenge $N \subset M$ mit der Eigenschaft $|N| = m$.

(b) Es existiert eine echte Teilmenge $N \subsetneq M$ von M und eine bijektive Abbildung $f : M \to N$.

(c) Es existiert eine injektive, aber nicht surjektive Abbildung $g : M \to M$.

2. Aufgabe (6 Punkte)
Man beweise per Induktion, dass die Anzahl aller möglichen Anordnungen der Elemente einer $n-$elementigen ($n \in \mathbb{N}$) Menge zu einem $n-$Tupel gleich $n!$ ist.

Es seien $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$. Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$, welcher in der Mathematik eine große Bedeutung bei kombinatorischen Fragestellungen (grob gesprochen beschäftigt sich die Kombinatorik mit dem Abzählen von Möglichkeiten) besitzt, ist definiert durch

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases},$$

wobei $0! := 1$ gesetzt sei.

3. Aufgabe (3+5=8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass folgende Identität gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \ .$$

Hinweis: Man führe einen Induktionsbeweis und benutze die Formel aus (a).

4. Aufgabe (6+3=9 Punkte)

(a) Man zeige per Induktion über n, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$ der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gleich der Anzahl der $k-$elementigen Teilmengen einer $n-$elementigen Menge ist.

Hinweis: Man benutze die Formel aus Aufgabe 3(a).

(b) Man folgere aus Teil (a) und Aufgabe 3(b), dass $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$ für jede Menge M mit n ($n \in \mathbb{N}$) Elementen gilt. Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(M) = \{N : N \subset M\}$ die Potenzmenge von M.