Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
18. Mai 2012

Analysis I
5. Übungsblatt

Abgabe: *Freitag, 25. Mai 2012, 9:00 Uhr in der Vorlesung*

1. Aufgabe (7 × 2=14 Punkte)
Es sei $(G, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper. Man zeige, dass für alle $m, n, p \in G$ folgende Aussagen gelten:

(a) $0 \leq n \Leftrightarrow -n \leq 0$

(b) $n \leq m \Leftrightarrow 0 \leq m - n$

(c) $(n \leq m \wedge 0 \leq p) \Rightarrow np \leq mp$

(d) Ist $n > 0$, so gilt genau dann $m \cdot n > 0$, wenn $m > 0$.

(e) $n^2 > 0$ für alle $n \in G \setminus \{0\}$

(f) Für alle $n \in G \setminus \{0\}$ gilt: $0 < n \Leftrightarrow 0 < n^{-1}$

(g) Für alle $n, m \in G \setminus \{0\}$ gilt: $0 < n < m \Leftrightarrow 0 < m^{-1} < n^{-1}$

2. Aufgabe (3+3=6 Punkte)
Man beweise die folgenden Aussagen:

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Gilt $a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so ist $a = 0$.

(b) Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $\frac{1}{n} < a$.

3. Aufgabe (2+2+5=9 Punkte)
Es seien A und B nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $s \geq 0$. Man beweise die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

(a) $\inf(-A) = -\sup(A)$

(b) $\sup(sA) = s \sup(A)$

(c) $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$, falls $x, y \geq 0$ für alle $x \in A, y \in B$ gilt.

Hierbei ist $A \cdot B := \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$ und $sA := \{s\} \cdot A$ gesetzt.

4. Aufgabe (5+3=8 Punkte)
Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$. Man zeige, dass $c, r \in \mathbb{Z}$ mit $r \in [0, b)$ falls $b > 0$ und $r \in [0, -b)$ falls $b < 0$ existieren, derart dass

$$a = cb + r$$

erfüllt ist. Außerdem zeige man, dass c, r durch obige Eigenschaft eindeutig bestimmt sind.