Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
01. Juni 2012

Analysis I
7. Übungsblatt

Abgabe: *Freitag, 08. Juni 2012, 9:00 Uhr in der Vorlesung*

1. Aufgabe (5+3=8 Punkte)

(a) Man beweise:
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle gegen denselben Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folgen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in $\mathbb{R}$, für welche $a_n \leq x_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Man zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt.

(b) Gilt die folgende (a) entsprechende Aussage für den $\mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$?
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei gegen denselben Grenzwert $a \in \mathbb{R}^d$ konvergente Folgen im $\mathbb{R}^d$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge im $\mathbb{R}^d$, für welche $\|a_n\| \leq \|x_n\| \leq \|b_n\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $\|.\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^d$ ist. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

2. Aufgabe (5+3+3=11 Punkte)
Man beweise folgende Aussagen:

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gegen $a \neq 0$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{a}$.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uneigentlich gegen $+\infty$.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente reelle Zahlenfolge, so konvergiert $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

3. Aufgabe (3+3+3+2+3=14 Punkte)

(a) Man überprüfe die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert (hierbei dürfen selbstverständlich in der Vorlesung bewiesene Grenzwertregeln verwendet werden):
   (i) $a_n = \binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$
   Hinweis: Man zeige, dass $a_n \geq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   (ii) $a_n = \frac{4n^3+2n^2-7}{-2n^4-n^2-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$
   (iii) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$

(b) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} := \left(\frac{n^2}{n^2+2n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$.
   (i) Man zeige $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.
   (ii) Zu $\epsilon > 0$ bestimme man das kleinste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, für welches $|x_n - 1| < \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\epsilon$ gilt.

4. Aufgabe (4+4+2=10 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die reelle Zahlenfolge, welche den "Startwert" $a_0 = 100$ besitzt und der Rekursionsbeziehung $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genügt.

(a) Man zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Hinweis: Man beweise zunächst durch Induktion, dass die Folge von unten durch 4 beschränkt ist und anschließend zeige man, dass sie monoton fallend ist.

(b) Man weise durch Induktion die Gültigkeit folgender expliziter Formel für das n-te ($n \in \mathbb{N}$) Folgenglied x_n der reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach:

$$x_n = x_0 q^n + c\frac{1-q^n}{1-q} \ ,$$

wobei für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die allgemeine rekursive Darstellung $x_{n+1} = qx_n + c$ mit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, c \in \mathbb{R}$ angenommen wird.

(c) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.