Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
08. Juni 2012

Analysis I
8. Übungsblatt

Abgabe: *Freitag, 15. Juni 2012, 9:00 Uhr in der Vorlesung*

Es seien $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $b-$adischer Bruch der Form

$$x_n = \epsilon \sum_{h=-k}^{n} a_h b^{-h} \ , n \in \mathbb{N}.$$

Dabei sind $\epsilon \in \{-1,1\}, k \in \mathbb{N}$ und $(a_h)_{h\in\mathbb{Z}_{\geq -k}} \in [0, b-1]_{\mathbb{N}}$. Dann heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **periodisch**, falls $h_0, r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ existieren mit $a_h = a_{h+r}$ für alle $h \in \mathbb{N}$ mit $h \geq h_0$. Man schreibt dann auch $x = \epsilon\ a_{-k}a_{-k+1}\cdots a_0, a_1a_2\cdots a_{h_0-1}\overline{a_{h_0}a_{h_0+1}\cdots a_{h_0+r-1}}$ für den Grenzwert x der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei h_0 minimal mit der Periodizitätseigenschaft gewählt wird.

Der $b-$adische Bruch heißt **endlich**, falls ein $h' \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ existiert mit $a_h = 0$ für alle $h \in \mathbb{N}$ mit $h \geq h'$ (d.h. die Entwicklung bricht ab). Somit ist jeder endliche $b-$adische Bruch periodisch der Periodenlänge $r = 1$ mit $a_h = a_{h+1} = 0$ für alle $h \in \mathbb{N}$ mit $h \geq h'$.

1. Aufgabe (4+5=9 Punkte)

(a) Man bestimme die $2-$adische Entwicklung der Zahl $\frac{7}{64}$ und die $3-$adische Entwicklung der Zahl $23\frac{65}{243}$.

(b) Es sei $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass, wenn x eine periodische $b-$adische Entwicklung besitzt, $x \in \mathbb{Q}$ gilt.

Hinweis: Man zeige, dass $q := 0, \overline{a_{h_0}a_{h_0+1}\cdots a_{h_0+r-1}}$ eine lineare Gleichung der Form $aq = b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$ erfüllt.

2. Aufgabe (7 Punkte)
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge, für die $|x_{n+1} - x_n| \leq 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

3. Aufgabe (7 Punkte)
Man zeige: Eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die drei Teilfolgen

$$(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}},\ (x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}},\ (x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergieren.

4. Aufgabe (7+3=10 Punkte)

(a) Man zeige: Eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen eine reelle Zahl, wenn Limesinferior und Limessuperior der Folge endlich sind und übereinstimmen, d.h.

$$-\infty < \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n < \infty$$

gilt. In diesem Fall ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

(b) Man beweise: Eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.