Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Wintersemester 2012/13
08. März 2013

1. Klausur Analysis II

Die folgende Klausur, bestehend aus 8 Aufgaben, ist in 120 Minuten zu bearbeiten.

1. Aufgabe (3+4+4=11 Punkte)

(a) Man bestimme das unbestimmte Integral $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

(b) Man bestimme das unbestimmte Integral $\int \arcsin(x)\,dx$. *(Hinweis: Man verwende $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.)*

(c) Existiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{\cos(e^x)}{\sqrt{x}}\,dx$?

2. Aufgabe (8 Punkte)
Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Auf $\mathbb{R}$ sei die Funktion F vermöge

$$F(k) := \int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx$$

erklärt. Man beweise $\lim_{|k|\to\infty} F(k) = 0$.

3. Aufgabe (3+3+3=9 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) Man zeige, dass f stetig in $(0,0)$ ist.

(b) Man bestimme sämtliche Richtungsableitungen von f im Punkte $(0,0)$, d.h. alle $\frac{\partial}{\partial v} f(0,0)$ mit $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) Man zeige, dass f nicht Fréchet-differenzierbar in $(0,0)$ ist.

4. Aufgabe (8 Punkte)
Man bestimme Maximum und Minimum der durch die Vorschrift $f(x,y) := e^{x(y+1)}$ gegebenen Funktion f auf der Einheitskreisscheibe $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. Aufgabe (8 Punkte)
Betrachtet wird der Raum $C([0,1])$ der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ versehen mit der Norm $\|.\|_\infty$. Es sei $\alpha : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\alpha(f) := \Big(f(0)\Big)^3,\ f \in C([0,1]) .$$

Man zeige, dass α Fréchet-differenzierbar ist und bestimme die Fréchetableitung, d.h. $\alpha'(f)g$ für $f, g \in C([0,1])$.

6. Aufgabe (4+4=8 Punkte)
Es sei $D := [1,4]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{x}{1+x}$.

(a) Man berechne die formale Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 := 2$.

(b) Man zeige, dass die obige Taylorreihe auf ganz D gegen f konvergiert.

7. Aufgabe (3+3+3=9 Punkte)
Es sei $D := [0, 1]$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die auf D vermöge

$$f_n(x) := \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

definierte Funktionenfolge. Man beweise:

(a) Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in D$.

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf D nicht gleichmäßig.

(c) Für alle $q \in (0, 1]$ konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[q, 1]$.

8. Aufgabe (8 Punkte)
Es sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiter sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf einer Menge $Y \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionenfolge mit Werten in K, welche gleichmäßig auf Y gegen eine Funktion $g : Y \to K$ konvergiert.
Man beweise, dass dann $(f \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf Y gegen $f \circ g$ konvergiert.

Viel Erfolg!