1. Aufgabe

(a) $$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^{y}\cdot 2y\,dy$$
$$= 2\left\{ e^{y}\cdot y - \int e^{y}\,dy \right\}$$
$$= 2e^{y}\left\{ y-1 \right\} = 2e^{\sqrt{x}}\left\{\sqrt{x}-1\right\},$$
wobei die erste Gleichheit nach Substitution mit $y := \sqrt{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $dx = 2\sqrt{x}\,dy = 2y\,dy$ folgt.

(b) Wende partielle Integration an und erhalte
$$\int \arcsin(x)\,dx = \int 1\cdot \arcsin(x)\,dx$$
$$= x\cdot \arcsin(x) - \int x\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= x\cdot \arcsin(x) - \int x\cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= x\cdot \arcsin(x) + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= x\cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

(c) Setze $f(x) := \frac{\cos(e^x)}{\sqrt{x}}$ für $x \in [0,1]$.
Dann ist die so erhaltene Funktion in jedem kompakten Intervall $[a,1]$, $a \in (0,1]$, stetig und somit dort Regelfunktion.
Es gilt weiter für $a \in (0,1]$
$$\int_a^1 |f(x)|\,dx \le \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2\{1-\sqrt{a}\} \xrightarrow{a\to 0+} 2$$
Somit existiert nach Vorlesung / Übung $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ und damit auch $\int_0^1 f(x)\,dx = \int \frac{\cos(e^x)}{\sqrt{x}}\,dx$. $\square$

2. Aufgabe

$$F(k) = \int_a^b f(x) \sin(kx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{k} f(x)\cos(kx)\Big|_a^b + \overbrace{\frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)\,dx}^{B(k):=}$$

$$= -\frac{1}{k}\Big(\underbrace{f(b)\cos(kb) - f(a)\cos(ka)}_{A(k):=}\Big)$$

$$= -\frac{1}{k} A(k) + \frac{1}{k} B(k)$$

Damit also

$$|F(k)| \le \frac{1}{k}\Big\{ |f(b)|\cdot 1 + |f(a)|\cdot 1 \Big\}$$

$$+ \frac{1}{k}\,|B(k)|$$

$$= \frac{1}{k}\Big\{ |f(b)| + |f(a)| \Big\} + \frac{1}{k}\int_a^b |f'(x)|\,\underbrace{|\cos(kx)|}_{\le 1}\,dx$$

$$= \frac{1}{k}\Big\{ |f(b)| + |f(a)| \Big\} + \frac{1}{k}\underbrace{\int_a^b |f'(x)|\,dx}_{\in \mathbb{R}} \quad ,$$

woraus $\lim_{|k|\to\infty} F(k) = 0$ folgt.

$\square$

3. Aufgabe

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a)

Es gilt

$$|f(x,y)|^2 = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

1.Fall: $x=0 \dot{\vee} y=0$

Dann ist leicht $|f(x,y)|^2 = 0$, also $f(x,y) = 0 = f(0,0)$

2.Fall: $x \neq 0 \wedge y \neq 0$

Dann gilt $|f(x,y)|^2 \leq \frac{x^2y^2}{y^2} = x^2 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$, woraus $f(x,y) \to 0$ für $(x,y)\to(0,0)$ folgt.

Damit ist f stetig in $(0,0)$.

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial v} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = \frac{t^2 v_1 v_2}{t\sqrt{t^2(v_1^2+v_2^2)}}$$

$$= \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = f(v_1, v_2).$$

(c) Angenommen, f wäre Frechet-differenzierbar in $(0,0)$.

Dann würde für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gelten:

$$f'(0,0)v = \frac{\partial}{\partial v} f(0,0) \overset{(b)}{=} f(v_1, v_2),$$

woraus folgen würde, dass f linear in v ist.

Es gilt aber z.B.

$$f(0,1) + f(1,0) = 0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}} = f(1,1)$$

↯ zur Linearität von f

$\square$

4. Aufgabe

$D := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \}$

$f: D \to \mathbb{R},\ f(x,y) := e^{x(y+1)}$

Zuerst wird f im Inneren von D untersucht.
Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \left((y+1) e^{x(y+1)},\ x\ e^{x(y+1)} \right)$$

Setze $\nabla f = 0$. Dann gilt

$$x = 0 \ \wedge\ y = -1 \quad \text{und} \quad (x,y) = (0,-1) \in \partial D .$$

Da f stetig ist und D kompakt, nimmt f auf D Maximum und Minimum an. Da es im Inneren keine kritischen Punkte gibt, werden Maximum und Minimum auf ∂D angenommen.

Definiere $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(x,y) := x^2+y^2-1$

Dann gilt $\nabla F(x,y) = (2x, 2y) \neq 0 \ \forall (x,y) \in \partial D$.
Insbesondere bleibt die Funktionalmatrix von F in allen Randpunkten von D den vollen Rang 1.
Wende den Satz von Lagrange an. Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt mit $F(x,y) = 0$ und
$f(x,y)$ ist extremal unter allen Werten $f(\tilde{x},\tilde{y})$, wobei $F(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$.
Dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I} && (y+1)\, e^{x(y+1)} = \lambda \cdot 2x \\
&\mathrm{II} && x\, e^{x(y+1)} = \lambda \cdot 2y \\
&\mathrm{III} && x^2+y^2 = 1
\end{aligned}$$

Seien zuerst $x \neq 0, y \neq 0$. Dann folgt aus I und II

$$\frac{y+1}{x} = \frac{x}{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 + y = x^2$$

Mit III ist $1 - y^2 = x^2$

Also $\quad y^2 + y = 1 - y^2$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -1 \quad \vee \quad y = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow \text{III} \qquad\qquad \Downarrow \text{III}$$

$$x = 0 \ \lightning_{\text{zur Vor. } x \neq 0} \qquad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Einsetzen und Überprüfen im Gleichungssystem ergibt, dass
$x = 0, y = -1, \lambda = 0$ Lösung ist.

Zudem gibt es keine Lösung zu $y = 0$, da aus III $x = \pm 1$ folgen würde und dies mit II unverträglich ist.

Damit ergibt das Lagrange-System die kritischen Werte
$(0, -1), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Einsetzen in f ergibt

$$f(0,-1) = e^0 = 1$$

0,5 $$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{3\sqrt{3}/4}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-3\sqrt{3}/4}$$

Also ist $e^{3\sqrt{3}/4}$ das Maximum und $e^{-3\sqrt{3}/4}$ das Minimum von f. $\square$

5. Aufgabe

$\alpha : C([0,1]) \to \mathbb{R}, \quad \alpha(f) := (f(0))^3$

Es wird gezeigt, dass die Abbildung

$A_f : C([0,1]) \to \mathbb{R}, \quad A_f(g) := 3\,(f(0))^2 g(0), \quad g \in C([0,1])$

die Fréchet-Ableitung von α an der Stelle $f \in C([0,1])$ ist.

Sei $f \in C([0,1])$ vorgegeben.

Linearität von A_f

Seien $g, h \in C([0,1])$. Es gilt

$$A_f(g+h) = 3(f(0))^2[g(0)+h(0)] = 3(f(0))^2 g(0) + 3(f(0))^2 h(0)$$
$$= A_f(g) + A_f(h)$$

Sei $k \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$A_f(k g) = 3(f(0))^2 k\, g(0) = k\{3\,f(0))^2 g(0)\}$$
$$= k\, A_f(g)$$

Beschränktheit von A_f

$$\|A_f\| = \sup_{\|g\|_\infty \le 1} |A_f(g)| = \sup_{\|g\|_\infty \le 1} |3 f^2(0)\, g(0)|$$
$$= 3 f^2(0) \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \underbrace{|g(0)|}_{\le \|g\|_\infty} \le 3 f^2(0) < \infty$$

Zudem gilt auch für $h \in C([0,1]),\ h \neq 0$:

$$\frac{\alpha(f+h) - \alpha(f) - A_f(h)}{\|h\|_\infty} = \frac{[f(0)+h(0)]^3 - f^3(0) - 3f^2(0)h(0)}{\|h\|_\infty}$$
$$= \frac{f^3(0) + 3f^2(0)h(0) + 3f(0)h^2(0) + h^3(0) - f^3(0) - 3f^2(0)h(0)}{\|h\|_\infty}$$

$$= \frac{3 f(0) h^2(0) + h^3(0)}{\|h\|_\infty}$$

Damit ist

$$\left| \frac{\alpha(f+h) - \alpha(f) - A_f(h)}{\|h\|_\infty} \right| \leq \frac{3|f(0)| \|h\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^3}{\|h\|_\infty}$$

$$= 3 \, |f(0)| \, \|h\|_\infty + \|h\|_\infty^2 \longrightarrow 0 \quad \text{für } \|h\|_\infty \to 0 .$$

$\square$

6. Aufgabe

$D := [1,4]$, $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x}{1+x}$

(a) Es gilt

$$f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$$
$$f''(x) = -2(1+x)^{-3}$$
$$f^{(3)}(x) = 6(1+x)^{-4}$$
$$\vdots$$

(*) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n! (1+x)^{-(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Damit gilt $f(2) = \frac{2}{3}$

$$f^{(n)}(2) = (-1)^{n+1} n! (3)^{-(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

Womit für die formale Taylorreihe

$$T^{f,2}(x) = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} 3^{-k-1} (x-2)^k$$

gilt.

(b) Nach Vorlesung konvergiert die Taylorreihe genau dann in x gegen f, wenn die Folge der Restglieder

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}$$, mit ξ im offenen Intervall zwischen x und 2 geeignet gewählt, gegen [falls $x \neq 2$, sonst klar] 0 konvergiert.

Nach (*) gilt

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1)! (1+\xi)^{-n-2}}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}$$
$$= (-1)^n \underbrace{\left(\frac{x-2}{1+\xi}\right)}_{q:=}^{n+1} \frac{1}{1+\xi}$$

Es genügt nun also zu zeigen, daß $|q| < 1$ gilt.

1. Fall: $x \geq 2$

Dann gilt $|q| < 1 \iff x - 2 < 1 + \xi$

$\iff x - \xi < 3$

$x - \xi < 3$ ist wahr, da $x \leq 4$ und $\xi > 2$

2. Fall: $1 \leq x < 2$

Dann gilt $|q| < 1 \iff 2 - x < 1 + \xi$

$\iff 1 < \xi + x$

$1 < \xi + x$ ist wahr, da $x \geq 1$ und $\xi \geq 1$

Damit konvergiert $R_n(x)$ für alle $x \in D$ gegen 0.

$\square$

7. Aufgabe

$D := [0,1]$, $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$

(a) Sei $x \in D$.

1. Fall $x = 0$.

Dann gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ✓

2. Fall $x \in (0,1]$.

Dann gilt

$$f_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{nx} + nx}$$

und damit

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{nx} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

(b) Es gilt für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$f_n(n^{-1}) = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + (n \cdot \frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty \geq \frac{1}{2} \quad \text{für } n \geq 1$$

Damit kann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergieren.

(c) Sei $q \in (0,1]$ und $\varepsilon > 0$. Es gilt für $x \in [q,1]$

$$|f_n(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{nx} + nx} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{nx} + nx > \frac{1}{\varepsilon}$$

Nun ist aber für $n > N := \lceil \frac{1}{q\varepsilon} \rceil$

$$\frac{1}{nx} + nx \geq nq > \frac{1}{\varepsilon}$$

Da N unabhängig von $x \in [q,1]$ ist, ist damit die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[q,1]$ gezeigt $\square$

8. Aufgabe

<u>Vor.:</u> $f : K \to \mathbb{R}$ $\overset{\text{stetig}}{\checkmark}$, $K \subset \mathbb{R}$ kompakt
$g_n : Y \to K$ konvergieren gleichmäßig gegen $g : Y \to K$

<u>Beh.</u> $(f \circ g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f \circ g$.

<u>Bew.</u> Nach Vorlesung ist f als stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass gilt:

(1) $x, y \in K,\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Wähle nun $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

(2) $\forall a \in Y\ \forall n \geq N : |g_n(a) - g(a)| < \delta$

[Dieses ist aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der g_n, $n \in \mathbb{N}$, gegen g möglich.]

Sei nun $a \in Y$ beliebig und $n \geq N$. Dann gilt nach (1)

$|f(g_n(a)) - f(g(a))| < \varepsilon$, da nach (2)

$|g_n(a) - g(a)| < \delta$ gilt.

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$