Musterlösung Probeklausur

1. Aufg.

a) $$\int_1^4 \sqrt{x}\cdot\log(x)\,dx = \left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\log(x)\right]_1^4 - \int_1^4 \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{16}{3}\cdot\log(4) - \int_1^4 \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{16}{3}\cdot\log(4) - \left[\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{16}{3}\cdot\log(4) - \frac{32}{9} + \frac{4}{9}$$

$$= \frac{16}{3}\cdot\log(4) - \frac{28}{9}$$

b) Es wird das Majorantenkriterium für Integrale angewandt. Definiere auf $[1,\infty)$ $g(x) := \frac{e}{x^2}$.
Dann gilt wegen $\cos x \leq 1 \;\forall x \in \mathbb{R}$ und der wachsenden Monotonie der e-Funktion

$$0 \leq \frac{e^{\cos x}}{x^2} \leq \frac{e}{x^2} \quad \forall x \in [1,\infty)$$

Es gilt für $c \geq 1$

$$\int_1^c \frac{e}{x^2}\,dx = e\cdot\int_1^c \frac{1}{x^2}\,dx = e\left[-x^{-1}\right]_1^c$$

$$= e\left(-\frac{1}{c}+1\right) \longrightarrow e \quad \text{für } c\to\infty.$$

Also existiert $\int_1^\infty \frac{e}{x^2}\,dx$ und somit auch $\int_1^\infty \frac{e^{\cos x}}{x^2}\,dx$ nach dem Maj. Krit. $\square$

2. Aufg.

(a) $f_n : D := [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x \cdot e^{-nx}$, $x \in D, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Es gilt offenbar $f_n(x) \geq 0$ $\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Es wird gezeigt, dass f_n ein Maximum auf D annimmt und dieses für $n \to \infty$ gegen 0 strebt.

Es gilt $f_n'(x) = e^{-nx} - xn\, e^{-nx} = e^{-nx}(1 - xn)$

Setze $f_n'(x) = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{n}$$

Weiter ist

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot e^{-1}$$

Weiter ist $f_n''(x) = -n e^{-nx}(1 - xn) - n e^{-nx}$

$$= -n e^{-nx}(1 - xn + 1)$$

$$= -n e^{-nx}(2 - xn)$$

Also $f_n''\left(\frac{1}{n}\right) = -n e^{-1} < 0$

$\Rightarrow$ f_n nimmt in $x_n := \frac{1}{n}$ das Maximum $\frac{1}{n} e^{-1}$ an

$\Rightarrow$ $\| f_n - 0 \|_\infty = \| f_n \|_\infty = \frac{1}{n} e^{-1} \to 0$ für $n \to \infty$

Also konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ glm. gegen die 0-Funktion.

(b) Sei $x \in D$ fixiert.

1. Fall $x = 0$. Dann gilt $g_n(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und g_n konvergiert in 0 gegen 0. ✓

2. Fall $x > 0$. Dann ist

$$g_n(x) = \underbrace{x}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{n}{e^{xn}}}_{\substack{\to 0 \text{ für } n \to \infty \\ \text{nach Vorlesung}}} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty$$

Damit konvergiert $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die 0-Fktn.

Zeige nun: $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht glm. gegen die 0-Fktn.

Es gilt $g_n(\frac{1}{n}) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-n \cdot \frac{1}{n}} = 1 \cdot e^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$\Rightarrow \quad \|g_n\|_\infty \geq e^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$\Rightarrow \quad (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht glm. gegen die 0-Fktn. $\square$

3. Aufgabe

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \log(1+e^x)$ für $x \in \mathbb{R}$

f ist 3 mal stetig differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad f''(0) = \frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x 2(1+e^x) \cdot e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{e^x(1+e^x)\{(1+e^x) - 2e^x\}}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

Zudem ist $f(0) = \log 2$

Damit gilt für das Taylorpolynom von f 2-ten Grades um $x_0 := 0$

$$T_2^{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \log 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$$

(b) Nach Vorlesung existiert für alle $x \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen $x_0 := 0$ und x, so daß

$$R_2^{f,0}(x) = \frac{f'''(\xi)}{6} x^3$$

Um also die Aussage $|R_2^{f,0}(x)| \leq \frac{1}{24} x^3 \ \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zu zeigen, genügt es

$$|f'''(x)| \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

zu beweisen.

Es gilt für $x \geq 0$

$$|f'''(x)| = \frac{e^{2x} - e^x}{(1+e^x)^3}$$

Es gelten folgende Äquivalenzen

$$|f'''(x)| \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2x} - e^{x} \leq \frac{1}{4}\left(1 + e^{x}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(1 + 3e^{x} + 3e^{2x} + e^{3x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{4} + \frac{7}{4}e^{x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x} = \frac{1}{4} + \frac{7}{4}e^{x} + \frac{1}{4}\left\{e^{3x} - e^{2x}\right\}$$

Die letzte Aussage ist offenbar für $x \geq 0$ aufgrund der wachsenden Monotonie der e-Funktion wahr. $\square$

4. Aufg.

Da $f : J \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert auf J eine Stammfunktion $F : J \to \mathbb{R}$ von f, d.h. $F' = f$.
Nach der Kettenregel ist die Komposition $F \circ g$ differenzierbar mit

$$(*) \quad \frac{d}{dt}\{F(g(t))\} = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

$\Rightarrow$ $F \circ g$ ist Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'$.

Da g' stetig ist und $f \circ g$ als Komposition stetiger Fktn. ebenfalls, ist die Fktn. $t \mapsto f(g(t)) \cdot g'(t)$ als stetige Funktion Regelfunktion.

Es gilt nun

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt \overset{(*)}{=} F(g(t))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(x)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx .$$

$\square$

5. Aufg.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Die Stetigkeit von f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ folgt aus der Tatsache, daß der Quotient stetiger Fktn (mit nicht verschwindenden Nenner) wieder stetig ist.

Sei nun $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Falls $x = 0$, so ist $f(x,y) = 0$ und damit

$|f(x,y) - f(0,0)| = |0-0| = 0$.

Sei nun $x \neq 0$. Es gilt dann

$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| \leq \frac{|x^3|}{x^2} = |x| \to 0$ für $(x,y) \to (0,0)$

Also ist f auch in $(0,0)$ stetig.

(b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f partiell differenzierbar bzgl. x und y als Quotient partiell differenzierbarer Fktn. mit nicht verschwindendem Nenner und es gilt dort

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

Wegen $f(x,0) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1 .$$

Wegen $f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0 .$$

$\Rightarrow$ f ist partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2$ und sogar stetig partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, da

$\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ dort eine Darstellung als Quotient stetiger Fktn. mit nicht verschwindendem Nenner besitzen.

(c) Ang.: f ist Fréchet-differenzierbar in $(0,0)$.
Dann existiert aufgrund der Definition eine in $(0,0)$ stetige Funktion $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0,0) = 0$, so daß für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f(x,y) = f(0,0) + f'(0,0)\cdot(x,y) + \varphi(x,y)\,\|(x,y)\|_2$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ folgt damit

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = 0 + (1,0)\cdot(x,y) + \varphi(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

und damit

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{x^3}{x^2+y^2} - x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3 - x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Für $x = y \neq 0$ gilt

$$|\varphi(x,x)| = \left|\frac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \not\to 0 \quad \text{für } x \to 0$$

Also ist φ in $(0,0)$ nicht stetig und der gewünschte Widerspruch ist erzielt.

$\square$