Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Wintersemester 2012/13
25. Januar 2013

Analysis II
Probeklausur (75 Minuten)

1. Aufgabe (4+4=8 Punkte)

(a) Man berechne den Wert des Integrals

$$\int_1^4 \sqrt{x}\log(x)\ dx\ .$$

(b) Existiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{e^{\cos(x)}}{x^2}\ dx\ ?$$

2. Aufgabe (3+6=9 Punkte)
Es sei $D := [0, \infty)$.

(a) Man zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $f_n(x) := xe^{-nx}$, gleichmäßig auf D gegen die $0-$Funktion konvergiert.

(b) Man zeige, dass die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $g_n(x) := nxe^{-nx}$, punktweise auf D gegen die $0-$Funktion konvergiert, jedoch dort nicht gleichmäßig.

3. Aufgabe (4+4=8 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \log(1 + e^x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme das Taylorpolynom $T_2^{f,0}$ zweiter Ordnung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

(b) Man zeige, dass für die Restgliedfunktion $R_2^{f,0}$ die Beziehung

$$|R_2^{f,0}(x)| \le \frac{1}{24}x^3 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$$

gilt.

4. Aufgabe (8 Punkte)
Man beweise die Substitutionsregel für Integrale unter Verwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung:
Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, $a < b$ in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a, b] \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(t))\ g'(t)\ dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx\ .$$

5. Aufgabe (2+4+4=10 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \ne (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Man zeige:

(a) f ist stetig.

(b) f ist partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2$ und stetig (partiell) differenzierbar in $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

(c) f ist nicht Fréchet-differenzierbar in $(0, 0)$.