Aufg. 4

Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die gegen 0 konvergiert mit $t_n \neq 0$ f.a. $n\in\mathbb{N}$. Sei $t\in[0,1]$.

Wir definieren $h_n : A \to \mathbb{R}$ durch

$$h_n(x) := \frac{f(x,t+t_n) - f(x,t)}{t_n}$$

f_t int'bar $\Rightarrow$ h_n int'bar.

Außerdem: $\forall x\in A : |h_n(x)| \leq g(x)$, denn:

Mittelwertsatz der Differentialrechnung $\Rightarrow$

$\exists\, t' \in (t, t+t_n)$ mit

$$h_n(x) = \frac{f(x,t+t_n) - f(x,t)}{t_n} = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t')$$

$$\Rightarrow \quad |h_n(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t')\right| \leq g(x)$$ gleichmäßig über t nach Vor.

Da $h_n \to \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_t$ f.ü., läßt sich der Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden: [Vollständigkeit von $(\mathbb{R}, d, d)$]

$x \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_t$ ist für jedes $t\in[0,1]$ int'bar und

$$F'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t+t_n) - F(t)}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_A f(x,t+t_n)\,dx - \int_A f(x,t)\,dx}{t_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_A \frac{f(x,t+t_n) - f(x,t)}{t_n}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_A h_n(x)\,dx \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int_A \lim_{n\to\infty} h_n(x)\,dx$$

$$= \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)(x,t)\,dx.$$

$\square$