4 Fourieranalysis

4.1 Definitionen und elementare Eigenschaften

Die motivierende Idee der Fourrierreihen ist es, periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (wobei man sich o.B.d.A. auf 2π-periodische Funktionen beschränken kann, s.u.) als **trigonometrische Reihe** darzustellen:

$$f(x) \approx \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \; c_n \in \mathbb{C}.$$

Dabei stellt sich natürlich die Frage, wie die Koeffizienten c_n zu wählen sein müssen, in welchem Sinne die Reihe gegen f konvergieren soll und unter welchen Voraussetzungen an f welche Konvergenz vorliegt.

4.1 Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt **periodisch** der **Periode** $T > 0$, falls gilt:

$$f(x+T) = f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

4.2 Bemerkung. (i) Ist $T > 0$ Periode von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so ist auch kT für $k \in \mathbb{N}$ Periode von f. Falls f eine kleinste Periode $T_0 > 0$ besitzt, so ist die Menge aller Perioden gerade durch

$$\{kT_0 \,|\, k \in \mathbb{N}\}$$

gegeben. Wir wollen dies beweisen: Sei dazu angenommen, dass T_1 Periode von f ist mit $T_1 \notin \{kT_0 \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. Dann existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$k_0T_0 < T_1 < (k_0+1)T_0.$$

Aus der Beziehung

$$f(x+k_0T_0) = f(x) = f(x+T_1) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt durch Setzung von $y := x + k_0T_0$ die Relation

$$f(y) = f(y + (T_1 - k_0T_0)) \;\; \forall y \in \mathbb{R},$$

so dass mit $T^* := T_1 - k_0T_0 < T_0$ eine strikt kleinere Periode als T_0 von f gefunden ist, was einen Widerspruch darstellt.

(ii) Eine kleinste Periode muss nicht existieren. Um Dieses einzusehen, kann man konstante Funktionen oder die Dirichletsche Sprungfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

betrachten.
(iii) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch der Periode T, so ist, wie man unmittelbar verifiziert,

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \tilde{f}(x) := f\Big(\frac{T}{2\pi}x\Big)$$

periodisch der Periode 2π, siehe obige Bemerkung.

Unter der Konvergenz einer Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ $(a_n \in \mathbb{C})$ mit den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als Indexbereich wollen wir im Folgenden stets die Konvergenz der symmetrischen Partialsummenfolge

$$S_n := \sum_{k=-n}^{n} a_n,\ n \in \mathbb{N}$$

verstehen.

Das folgende Lemma sagt aus, wie die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe aussehen müssen, wenn Diese gleichmäßig gegen eine 2π-periodische Funktion f konvergiert.

4.3 Lemma. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Riemann-integrierbare 2π-periodische Funktion, die sich als Summe einer gleichmäßig konvergenten trigonometrischen Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, $c_n \in \mathbb{C}$, darstellen lässt. Dann gilt*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Beweis. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz können Grenzwert- und Integralbildung vertauscht werden und man berechnet für $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}e^{-imx}\,dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx}_{=\delta_n^m 2\pi} \\ &= c_m.\end{aligned}$$

□

Dieses motiviert die folgende Definition

4.4 Definition. Wir schreiben

$\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f\ 2\pi\text{−periodisch und Riemann-integrierbar auf } [0, 2\pi]\}$

und definieren für $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ die **Fourierkoeffizienten** von f durch

$$c_n := c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Die hieraus gebildete (formale) trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

heißt **Fourierreihe** von f.

4.5 Beispiel. Betrachte die 2π-periodisch fortgesetzte Funktion

$$v(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & \text{für } 0 < |x| < \pi \\ 0 & \text{für } |x| \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

v ist als stückweise konstante Funktion offenbar Riemann-integrierbar auf $[0, 2\pi]$ und es gilt für die Fourierkoeffizienten

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\pi} 1\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -1\, dx\Big) = 0$$

und für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) e^{-inx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\pi} e^{-inx}\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-inx}\, dx\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\Big[\frac{e^{-inx}}{-in}\Big]_0^{\pi} - \Big[\frac{e^{-inx}}{-in}\Big]_{\pi}^{2\pi}\Big) \\ &= -\frac{1}{2\pi i n}\Big(2e^{-in\pi} - 2\Big) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi i n} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Somit gilt unter Anwendung der Euler-Identität für die formale Fourierreihe von v

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0, n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{2}{\pi i n} e^{inx} \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{2}{\pi i n}\left\{e^{inx} - e^{-inx}\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x).\end{aligned}$$

Man kann zwar recht einfach mit dem Dirichletschen Konvergenzkriterium für Reihen nachprüfen, dass die Reihe punktweise konvergiert, jedoch ist überhaupt nicht offensichtlich, ob die Reihe auch die Funktion v darstellt. Dieses motiviert uns, allgemeine Konvergenzkriterien (mit Konvergenz gegen die Ausgangsfunktion) für Fourierreihen zu etablieren.

Doch zunächst listen wir eine Reihe von elementaren Eigenschaften der Fourierkoeffizienten auf. Zu einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$f_a(x) := f(x+a), \ \ x \in \mathbb{R}$$

für die im Definitionsbereich um a translatierte Funktion.

4.6 Lemma. *Es seien $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gelten folgende Aussagen*

(i) $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_c^{2\pi+c} f(x)\,dx$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$

(ii) $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f_a(x)\,dx$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$

(iii) $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$ *für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *(Linearität)*

(iv) $c_n(f_a) = e^{ina} c_n(f)$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$

(v) $c_n(e^{ix} f) = c_{n-1}(f)$

(vi) *Für* $f \equiv \lambda$ *ist*

$$c_n = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ \lambda & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

Für $f = e^{imx}$ *ist*

$$c_n = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m. \end{cases}$$

(vii) $|c_n(f)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$

(viii) Ist sogar $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) := C^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, *so gilt*

$$c_n(f') = in\, c_n(f).$$

Beweis. (i) Es gilt

$$\int_c^{2\pi+c} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \int_0^c f(x)\,dx + \int_{2\pi}^{2\pi+c} f(x)\,dx$$

und außerdem mit der Substitution $x := y - 2\pi$ und der Periodizität von f

$$\int_{2\pi}^{2\pi+c} f(x)\,dx = \int_0^c f(y-2\pi)\,dy = \int_0^c f(y)\,dy,$$

woraus

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_c^{2\pi+c} f(x)\,dx$$

folgt.

(ii) Es gilt mit einer Substitution und mit (i)

$$\int_0^{2\pi} f_a(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x+a)\,dx = \int_a^{2\pi+a} f(y)\,dy = \int_0^{2\pi} f(y)\,dy.$$

(iii) Die Linearität der Fourierkoeffizienten folgt sofort aus deren Definition und der Linearität des Integrals.

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned}
c_n(f_a) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+a)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(x)e^{-in(x-a)}\,dx \\
&=^{(i)} e^{ina}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \\
&= e^{ina}c_n(f).
\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
c_n(e^{ix}f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix}f(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-i(n-1)x}\,dx \\
&= c_{n-1}(f).
\end{aligned}$$

(vi) Die erste Aussage folgt sofort durch einfaches Ausrechnen, die zweite daraus, dass

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = 2\pi\delta_n^m.$$

(vii) Durch elementares Abschätzen erhält man

$$|c_n(f)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)e^{-inx}|\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx.$$

(viii) Mit partieller Integration ergibt sich

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}[f(x)e^{-inx}]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(-in)e^{-inx}\,dx = in\,c_n(f),$$

wobei verwendet wurde, dass $x \mapsto f(x)e^{-inx}$ 2π-periodisch ist.

□

4.7 Korollar. *Sei $f \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dann gilt unter der Setzung $k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f''(x)|\,dx$ die Abschätzung*

$$|c_n(f)| \le k\frac{1}{n^2},\ \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Insbesondere konvergiert die Fourierreihe von f absolut und damit in diesem Fall (da $|e^{inx}| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$) auch gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Zweifache Anwendung von Lemma 4.6 (viii) liefert für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f'') = inc_n(f') = -n^2 c_n(f),$$

also für $n \ne 0$

$$c_n(f) = -\frac{1}{n^2}c_n(f'')$$

und damit mit (vii)

$$|c_n(f)| \le k\frac{1}{n^2}.$$

Die Konvergenzaussagen ergeben sich nun aus der Tatsache, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergiert. □

4.8 Bemerkung. Ist $f \in C^m_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so lässt sich per vollständiger Induktion zeigen, dass

$$|c_n(f)| \le k\frac{1}{n^m},\ \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

gilt, wobei $k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(m)}(x)|\,dx$ sei. Die Fourierreihe konvergiert also umso schneller, je glatter (regulärer) die Funktion ist.

Eine einfache Beobachtung ist der folgende

4.9 Satz. *Es seien γ_n, $n \in \mathbb{Z}$, komplexe Zahlen, so dass die trigonometrische Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert. Dann sind die γ_n gerade die Fourierkoeffizienten c_n ihrer Grenzfunktion.*
In knappen Worten: Eine gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe ist die Fourierreihe ihrer Summe.

Beweis. Setze für $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}.$$

Nach Voraussetzung ist f gleichmäßiger Grenzwert der obigen Funktionenreihe. Für deren Koeffizienten gelten nach Lemma 4.3 gerade

$$\gamma_n = c_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

□

4.2 Konvergenzresultate

Wir wollen zunächst ein Eindeutigkeitsresultat beweisen.

4.10 Satz. *Es sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit*

$$c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dann gilt $f(x_0) = 0$ für alle Stetigkeitspunkte x_0 von f.

4.11 Bemerkung. Da für $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Menge der Unstetigkeitsstellen nach einem Resultat der Analysis eine Lebesguesche Nullmenge ist, gilt in der Situation von Satz 4.10 $f = 0$ fast überall, die Menge der Punkte x mit $f(x) \neq 0$ ist also sehr "klein".

Beweis von Satz 4.10. (I) Sei zunächst vorausgesetzt, dass f reellwertig ist. Es gelte $c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$ und wir nehmen an, dass eine Stetigkeitsstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir von $x_0 = 0$ und $f(x_0) > 0$ ausgehen. Es wird nun eine Folge von trigonometrischen Polynomen p_k, $k \in \mathbb{N}$, konstruiert mit

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_k(x)\, dx = +\infty,$$

was einen Widerspruch zu $c_n = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$ darstellt.
(II) Da f stetig in $x_0 = 0$ ist, können wir $\delta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ finden mit

$$f(x) > \frac{f(0)}{2} > 0 \quad \text{für alle } |x| < \delta.$$

Sei weiterhin $\epsilon > 0$ so klein gewählt, dass für $p(x) := \cos(x) + \epsilon$

$$|p(x)| < 1 - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } \delta \le |x| \le \pi$$

erfüllt ist. Schließlich wähle $\eta \in (0, \delta)$ mit

$$p(x) \ge 1 + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } |x| < \eta$$

und setze für $k \in \mathbb{N}$

$$p_k(x) := (p(x))^k = (\cos(x) + \epsilon)^k,$$

wobei die p_k aufgrund der Beziehung $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$ offenbar trigonometrische Polynome sind. Als Riemann-integrierbare Funktion ist f definitionsgemäß beschränkt, d.h. es existiert $B > 0$ mit

$$|f(x)| \le B \quad \text{für alle } |x| \le \pi.$$

(III) Wir zerlegen das Intervall $[-\pi, \pi]$ in die drei Bereiche

$$\{|x| \le \eta\},\ \{\eta \le |x| \le \delta\},\ \{\delta \le |x| \le \pi\},$$

auf welchen wir die folgenden Abschätzungen machen können:

$$\Big| \int_{\delta \le |x| \le \pi} f(x) p_k(x)\, dx \Big| \le \int_{\delta \le |x| \le \pi} |f(x) p_k(x)|\, dx \Big| \le 2\pi B \big(1 - \frac{\epsilon}{2}\big)^k,$$

$$\int_{\eta \le |x| \le \delta} f(x) p_k(x)\, dx \ge 0,$$

da der Integrand in diesem Bereich nichtnegativ ist, und

$$\int_{|x| \le \eta} f(x) p_k(x)\, dx \ge 2\eta \frac{f(0)}{2} \big(1 + \frac{\epsilon}{2}\big)^k.$$

Insgesamt ergibt sich also wie gewünscht

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_k(x)\, dx \ge -2\pi B \big(1 - \frac{\epsilon}{2}\big)^k + 2\eta \frac{f(0)}{2} \big(1 + \frac{\epsilon}{2}\big)^k \to +\infty \quad (k \to \infty).$$

(IV) Sei nun der allgemeine Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zugelassen. Wir zerlegen f in Real- und Imaginärteil:

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

wobei $u, v \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Für diese gilt

$$(\star) \quad u(x) = \frac{f(x) + \bar{f}(x)}{2}, \ v(x) = \frac{f(x) - \bar{f}(x)}{2i}.$$

Weiterhin können wir für $n \in \mathbb{Z}$ unter Ausnutzung der Stetigkeit der Komplexkonjugation berechnen:

$$\begin{aligned} c_n(\bar{f}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) e^{-inx} \, dx \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, dx} \\ &= \overline{c_{-n}(f)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

was mit der Additivität der Fourierkoeffizienten und $(\star)$

$$c_n(u) = 0 = c_n(v) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}$$

liefert. Aus **(I)** - **(III)** folgt also $u(x_0) = 0 = v(x_0)$, was schließlich $f(x_0) = 0$ impliziert. □

4.12 Korollar. *Ist $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, d.h. f ist stetig und 2π-periodisch, und gilt*

$$c_n = 0 \textit{ für alle } n \in \mathbb{Z},$$

so gilt $f \equiv 0$.
Insbesondere: Sind $f, g \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit

$$c_n(f) = c_n(g) \textit{ für alle } n \in \mathbb{Z},$$

so gilt $f \equiv g$.

Beweis. Die Aussagen folgen sofort aus Satz 4.10 und der Linearität der Fourierkoeffizienten. □

Als weitere Folgerung von Satz 4.10 erhalten wir das folgende Konvergenzresultat.

4.13 Satz. *Sei $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so dass die Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ von f absolut (und damit gleichmäßig) konvergiert, d.h.*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ (gleichmäßig) gegen f.

Beweis. Wie früher argumentiert, konvergiert die Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ von f gegen eine Funktion $g \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Gemäß Satz 4.9 stimmen die Fourierkoeffizienten von g mit denen von f überein:

$$c_n(g) = c_n(f) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z},$$

woraus schließlich mit Korollar 4.12 $f = g$ folgt. □

4.14 Folgerung. Sei $f \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Korollar 4.7 (gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe) und Satz 4.13. □

4.15 Satz (Riemann-Lebesgue-Lemma)**.** *Es sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dann gilt*

$$\lim_{|n| \to \infty} c_n = 0.$$

Für den Beweis verwenden wir das folgende Approximationsresultat aus der Maßtheorie:

Satz. Es sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar. Dann existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $g \in C^\infty_c([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < \epsilon.$$

Beweis des Riemann-Lebesgue-Lemmas. Zu beliebigem $\epsilon > 0$ wählen wir gemäß dem Approximationssatz ein $g \in C^\infty_c([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < \epsilon.$$

Aufgrund des kompakten Trägers kann g zu einer 2π-periodischen Funktion $g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Nach Korollar 4.7 existiert $k > 0$ mit

$$|c_n(g)| \leq k \frac{1}{n^2}, \; n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Damit gilt also

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f-g)| + |c_n(g)| \leq \frac{\epsilon}{2\pi} + \frac{k}{n^2} < 2\epsilon \quad (\text{für } |n| \text{ groß genug}),$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Damit können wir nun ein hinreichendes Kriterium dafür angeben, dass die Fourierreihe einer Funktion an einer vorgegebenen Stelle gegen einen vorgegebenen Wert konvergiert.

4.16 Satz. *Es sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass die Funktion*

$$h(x) := \left|\frac{f(x)}{x}\right|$$

Riemann-integrierbar auf $[-\delta, \delta]$ ist, so konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle $x = 0$ gegen 0.

Beweis. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$g(x) := \frac{f(x)}{1 - e^{ix}},$$

wobei g in den Punkten $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, Definitionslücken besitzt. Als Quotient 2π-periodischer Funktionen ist g selber wieder 2π-periodisch. Wir werden außerdem weiter unten zeigen, dass $g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt. Ist Dieses sichergestellt, so gilt insbesondere nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma $\lim_{|n|\to\infty} c_n(g) = 0$. Unter Verwendung von $f = (1 - e^{ix})g$ und Lemma 4.6 (v) berechnen wir weiterhin

$$c_n(f) = c_n(g - e^{ix}g) = c_n(g) - c_{n-1}(g) \to 0 \quad (|n| \to \infty).$$

Also gilt für die n-te Partialsumme der Fourierreihe von f in 0

$$\begin{aligned} S_n(f)(0) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ik0} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(g) - c_{k-1}(g) \\ &= c_n(g) - c_{-n-1}(g) \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Nun zeigen wir $g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Da g in jedem Bereich

$$[-\pi, , -c] \cup [c, \pi], \; c \in (0, \pi)$$

stetig und beschränkt und damit dort Riemann-integrierbar ist, genügt es zu zeigen, dass g in einer Umgebung der 0 integrierbar ist. Setze

$$\varphi(x) := \frac{x}{1 - e^{ix}}.$$

Mit der Regel von de-l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 - e^{ix}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-i} = i,$$

womit insbesondere $k > 0$ existiert mit $|\varphi(x)| \le k$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Damit folgt

$$|g(x)| = \left|\frac{f(x)}{1 - e^{ix}}\right| = \left|\frac{f(x)}{x} \frac{x}{1 - e^{ix}}\right| \le k\left|\frac{f(x)}{x}\right|,$$

was mit dem Majorantenkriterium die Integrierbarkeit der in $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ stetigen Funktion g beweist. □

Durch Translation können wir obigen Satz verallgemeinern:

4.17 Korollar. *Es seien $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$. Falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass die Funktion*

$$h(x) := \left|\frac{f(x) - c}{x - a}\right|$$

Riemann-integrierbar auf $[-\delta, \delta]$ ist, so konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle $x = a$ gegen c:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(a) = c.$$

Beweis. Setze

$$\tilde{f}(y) := f(y + a) - c, \; y \in \mathbb{R}.$$

Es gilt dann für $y \in [-\delta, \delta]$ unter der Setzung $x := y + a$:

$$\frac{\tilde{f}(y)}{y} = \frac{f(y + a) - c}{y} = \frac{f(x) - c}{x - a},$$

womit $\tilde{f}$ also integrierbar auf $[-\delta, \delta]$ ist. Aufgrund Satz 4.16 gilt also

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\tilde{f})(0) = 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} c &= c + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\tilde{f}) e^{in0} \\ &= c + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\tilde{f}) \\ &= c - c + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{ina} \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n(f)(a), \end{aligned}$$

wobei die Eigenschaften (iii),(iv) und (vi) von Lemma 4.6 verwendet wurden. □

Damit können wir beweisen, dass stetige Funktionen, die einer gewissen Bedingung an ihren Stetigkeitsmodul genügen, punktweise durch ihre Fourierreihe dargestellt werden.

4.18 Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt **Hölder-stetig** zum Exponenten $\alpha \in (0,1]$ in $a \in \mathbb{R}$, falls ein $c > 0$ und ein $\delta > 0$ existieren, so dass

$$|f(x) - f(a)| \leq c|x-a|^\alpha \quad \text{für alle } |x-a| < \delta.$$

Ist f in allen Punkten des Definitionsbereichs Hölder-stetig zum Exponenten α, so heißt f **Hölder-stetig** (zum Exponenten α) schlechthin.

4.19 Satz. *Sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha \in (0,1]$ in $a \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle a gegen $f(a)$:*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(a) = f(a).$$

Insbesondere: Ist f Hölder-stetig, so konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen f.

Beweis. Setze $c := f(a)$. Dann gilt

$$\left|\frac{f(x) - c}{x-a}\right| \leq c^*|x-a|^{\alpha-1},$$

wobei $c^* > 0$ die Konstante aus der Definition der Hölder-Stetigkeit sei. Da $\alpha - 1 > -1$ gilt, ist $x \mapsto c^*|x-a|^{\alpha-1}$ integrierbar in einem gewissen Intervall $[a-\delta, a+\delta]$, so dass mit Korollar 4.17 und dem Majorantenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(a) = c = f(a)$$

folgt. □

Eine weitere Folgerung aus dem Konvergenzkriterium Satz 4.16 ist der folgende auf Riemann zurückgehende Lokalisationssatz:

4.20 Satz (Riemannscher Lokalisationssatz)**.** *Es seien $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so dass*

$$f \equiv g$$

in einer gewissen Umgebung $[a-\delta, a+\delta]$ $(\delta > 0)$ eines Punktes $a \in \mathbb{R}$ gilt. Dann besitzen die Fourierreihen von f und g an der Stelle a dasselbe Konvergenzverhalten, insbesondere denselben Grenzwert im Falle der Konvergenz.

Beweis. Setze $h := f - g$. Dann gilt offenbar

$$h \equiv 0 \quad \text{in } [a-\delta, a+\delta],$$

womit insbesondere

$$x \mapsto \left| \frac{h(x) - 0}{x - a} \right|$$

integrierbar auf $[a-\delta, a+\delta]$ ist. Mit Korollar 4.17 folgt damit

$$S_n(f)(a) - S_n(g)(a) = S_n(h)(a) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

woraus sich die Behauptung ergibt. □

Wir wollen im Folgenden das Konvergenzverhalten der Fourierreihe einer Funktion in gewissen "gutartigen" Unstetigkeitsstellen untersuchen. Als Hilfsfunktion sei die Funktion v aus Beispiel 4.5 betrachtet:

$$v(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & \text{für } 0 < |x| < \pi \\ 0 & \text{für } |x| \in \{0, \pi\}, \end{cases}$$

welche außerhalb $[-\pi, \pi]$ 2π-periodisch fortgesetzt wird. Ihre (formale) Fourierreihe hatten wir dort bestimmt zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x).$$

Da v stückweise konstant mit Sprungstellen $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, insbesondere dort Hölder-stetig ist, und zudem $\sin((2n-1)x) = 0$ für alle $x \in \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ gilt, stellt die Fourierreihe v auf der gesamten Zahlengerade dar:

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Inbesondere sieht man, dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in den Sprungstellen von v gegen den Mittelwert der beiden einseitigen Limites 1 bzw. −1. Es sei darauf hingewiesen, dass Dieses i.A. nicht gilt, jedoch bei folgender modifizierter Auslegung des einseitigen Limes schon:

4.21 Satz. *$f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $a \in \mathbb{R}, c^-, c^+ \in \mathbb{C}$. Sind die Funktionen*

$$x \mapsto \left|\frac{f(x) - c^-}{x - a}\right| \text{ integrierbar auf } [a - \delta, a)$$
$$x \mapsto \left|\frac{f(x) - c^+}{x - a}\right| \text{ integrierbar auf } (a, a + \delta]$$

für ein gewisses $\delta > 0$, so konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle $x = a$ gegen den Mittelwert $c := \frac{1}{2}(c^+ + c^-)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(a) = c.$$

Beweis. Sei v definiert wie weiter oben und die Hilfsfunktion $g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ erklärt durch

$$g(x) := f(x) - \frac{1}{2}(c^+ - c^-)v(x - a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für Diese gilt dann

$$g(x) - c = \begin{cases} f(x) - c^- & \text{für } x \in [a - \delta, a) \\ f(x) - c^- & \text{für } x \in (a, a + \delta], \end{cases}$$

falls zusätzlich $0\delta < \pi$ gilt. Aufrund der Voraussetzung ist also

$$x \mapsto \left|\frac{g(x) - c}{x - a}\right|$$

integrierbar auf $[a - \delta, a + \delta]$, so dass mit Korollar 4.17

$$\lim_{n\to\infty} S_n(g)(a) = c$$

folgt. Schließlich haben wir wie gewünscht

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(a) = \lim_{n\to\infty} S_n(g)(a) + \frac{1}{2}(c^+ - c^-) \lim_{n\to\infty} S_n(v)(0) = c + 0 = c.$$

□

4.3 Der Raum L^2 und Fourierreihen

Neben den theoretischen Konzepten der Hilbertraumtheorie interessiert uns speziell die Beantwortung der Frage, ob/wann die Fourierreihe einer auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktion f im 2-ten Integralmittel gegen f konvergiert:

$$\left(\int_I |S_n(f)(x) - f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Es sei im Folgenden $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Für Lebesgue-messbares $f : I \to \mathbb{C}$ sei

$$\|f\|_2 := \Big(\int_I |f(x)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \in [0, \infty]$$

und wir definieren

$$\mathcal{L}^2(I) := \{ f : I \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ Lebesgue-messbar und } \|f\|_2 < \infty \}.$$

Offenbar ist die Menge der (Lebesgue-)messbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ ein Vektorraum mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{C} \\ (f+g)(x) &:= f(x) + g(x). \end{aligned}$$

Man rechnet schnell nach, dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda f\|_2 = \Big(\int_I |\lambda f(x)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|f\|_2$$

gilt und somit $f \in \mathcal{L}^2(I) \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}^2(I)$. Aus Aussage (ii) des folgenden Lemmas folgt, dass $\mathcal{L}^2(I)$ ebenfalls abgeschlossen unter Addition ist.

4.22 Lemma. *Für $f, g \in \mathcal{L}^2(I)$ gilt*

(i) $\int_I |f(x)g(x)| \, dx \le \|f\|_2 \, \|g\|_2$ *(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)*

(ii) $\|f + g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$ *(Minkowski-Ungleichung)*

(iii) $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *fast überall*

Beweis. Beweis als Übungsaufgabe bzw. siehe Maßtheorie für (iii). □

Damit sehen wir insbesondere, dass $\mathcal{L}^2(I)$ ein Vektorraum mit der oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren ein Vektorraum ist. Wir wünschen uns zusätzlich die Eigenschaften des normierten Vektorraums $(V, \|.\|)$:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \ \lambda \in \mathbb{C}$

(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|,$

von denen nur Eigenschaft (i) verletzt ist. Um diesen "Missstand" zu beheben, wollen wir Funktionen, die bis auf eine Nullmenge übereinstimmen, miteinander identifizieren:

$$f \sim g :\Leftrightarrow f = g \text{ fast überall }, \quad (f, g \in \mathcal{L}^2(I)).$$

Man prüft schnell nach, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{L}^2(I)$ definiert:

(i) $f \sim f$ (Reflexivität)

(ii) $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$ (Symmetrie)

(iii) $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$ (Transitivität)

Den zugehörigen Raum der Äquivalenzklassen $[f]$, d.h. den Quotientenraum

$$L^2(I) := \mathcal{L}^2(I)/\sim$$

versehen wir mit den Operationen

$$\begin{aligned} &\lambda[f] + \mu[g] := [\lambda f + \mu g] \\ &\|[f]\|_2 := \|f\|_2, \end{aligned}$$

deren Wohldefiniertheit, d.h. Unabhängigkeit von der Wahl des Vertreters einer Äquivalenzklasse, man schnell nachprüft. Man beachte, dass die Norm $\|.\|_2$ auf $L^2(I)$ sogar von dem Skalarprodukt

$$< f, g >_{L^2} := \int_I f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad f, g \in L^2(I)$$

induziert wird, d.h. es gilt

$$\|f\|_2 = \sqrt{< f, f >_2}.$$

Wir sagen, dass eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^2(I)$ gegen $f \in L^2(I)$ konvergiert, falls

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$$

gilt.

4.23 Lemma. *Das Skalarprodukt* $< ., . > := < ., . >_{L^2}$ *ist bzgl. der Norm* $\|.\|_2$ *stetig, d.h. für* $f_n \to f$ *und* $g_n \to g$ *in* $L^2(I)$ *gilt*

$$\lim_{n \to \infty} < f_n, g_n > = < f, g > .$$

Beweis. Es gilt unter Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |< f_n, g_n > - < f, g >| &\leq |< f_n, g_n > - < f, g_n >| + |< f, g_n > - < f, g >| \\ &= |< f_n - f, g_n >| + |< f, g_n - g >| \\ &\leq \|f_n - f\|_2 \underbrace{\|g_n\|_2}_{\leq C} + \|f\|_2 \|g_n - g\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als konvergente Folge beschränkt, etwa durch $C > 0$, ist. □

Ohne Beweis notieren wir folgendes fundamentales Resultat aus der Funktionalanalysis

4.24 Satz (Vollständigkeit von L^2). *Der normierte Raum $L^2(I)$ ist bzgl. seiner Norm $\|.\|_2$ vollständig, d.h. jede Cauchyfolge in $L^2(I)$ konvergiert in $L^2(I)$.*

4.25 Bemerkung. **(i)** Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.
(ii) Falls zusätzlich die Norm von einem Skalarprodukt induziert ist, so heißt der Raum **Hilbertraum**.
Somit ist $(L^2(I), \|.\|_2)$ also ein Hilbertraum.

4.26 Definition. *(i)* $u, v \in L^2(I)$ heißen **orthogonal**, falls

$$< u, v >_{L^2} = 0.$$

(ii) Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I)$ heißt **Orthonormalfolge**, falls

$$< u_n, u_m > = \delta_n^m \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N},$$

d.h. die u_n sind paarweise orthogonal und normiert.

4.27 Beispiel. Wegen

$$< e^{inx}, e^{imx} >_{L^2([0,2\pi])} = \int_0^{2\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}\, dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\, dx = \delta_n^m 2\pi$$

ist $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalfolge in $L^2([0, 2\pi])$.

Im Falle von Reihen, die über Orthonormalfolgen gebildet werden, gelten die folgenden interessanten Resultate:

4.28 Lemma. *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I)$ eine Orthonormalfolge und $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen. Dann gelten:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ *konvergiert* $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$

(ii) *Falls* $f, g \in L^2(I)$ *darstellbar sind durch*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \ g = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n \quad (\textit{Konvergenz in } L^2),$$

so gilt

$$< f, g >= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n},$$

insbesondere

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2.$$

(iii) *Es gilt*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \Rightarrow \alpha_n =< f, u_n >,$$

insbesondere sind die darstellenden Koeffizienten in der unendlichen Summe eindeutig bestimmt.

Beweis. Beweis als Übungsaufgabe. □

Gegeben eine Orthonormalfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(I)$ lassen sich auf natürliche Weise die Fourierkoeffizienten und die (formale) Fourierreihe einer Funktion $f \in L^2(I)$ bzgl. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren:

4.29 Definition. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I)$ eine Orthonormalfolge und $f \in L^2(I)$. Dann heißen die Zahlen

$$\alpha_n :=< f, u_n >, \ n \in \mathbb{N}$$

und die formale Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} < f, u_n > u_n$$

die **Fourierkoeffizienten** bzw. **Fourierreihe** von f bzgl. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.30 Bemerkung. Sei der Spezialfall $I = [0, 2\pi]$ betrachtet. Gemäß Beispiel 4.27 ist $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalfolge in $L^2([0, 2\pi])$. Für $f \in L^2([0, 2\pi])$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$\alpha_n =< f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \sqrt{2\pi} c_n,$$

wobei die c_n die Fourierkoeffizienten aus Abschnitt 4.1 und 4.2 seien. Bis auf den konstanten Term $\sqrt{2\pi}$ kann die Hilbertraum-Definition der Fourierkoeffizienten also als eine Verallgemeinerung der entsprechenden früheren Definition betrachtet werden. Die (formalen) Fourierreihen stimmen jedoch exakt überein:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Wir wollen im Folgenden untersuchen, unter welchen Bedingungen (an die Orthonormalfolge) die Fourierreihe einer L^2-Funktion f in der L^2-Norm gegen f konvergiert. Es scheint plausibel, dass Dieses ohne weitere Forderungen an die Orthonormalfolge i.A. nicht richtig sein kann. Die folgende Eigenschaft, von der wir später zeigen werden, dass sie für obige Konvergenz hinreichend ist, soll sicherstellen, dass die Orthonormalfolge auch wirklich den gesamten Raum $L^2(I)$ "ausschöpft", so dass sie auch wirklich als "Basis" des Raums fungieren kann.

4.31 Definition. Eine Orthonormalfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I)$ heißt **vollständig**, falls für $f \in L^2(I)$ aus der Beziehung

$$< f, u_n >= 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

bereits $f = 0$ folgt.

Wir notieren folgenden wichtigen Approximationssatz:

4.32 Satz (Approximationssatz)**.** *Seien $f \in L^2(I)$ und $A \subseteq \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I)$ eine (nicht notwendig vollständige) Orthonormalfolge,*

$$f_A := \sum_{n\in A} < f, u_n > u_n,$$

und $(\beta_n)_{n\in A}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann gilt

$$||f - f_A||_2^2 = ||f||_2^2 - \sum_{n\in A} |< f, u_n >|^2 \leq ||f - \sum_{n\in A} \beta_n u_n||_2^2.$$

Insbesondere liefert f_A die beste L^2-Approximation für f innerhalb $\operatorname{span}\{u_n \,|\, n \in A\}$.

Beweis. Setze $g := \sum_{n\in A} \beta_n u_n$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_2^2 &= < f-g, f-g > \\
&= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 - < f, g > - < g, f > \\
&= \|f\|_2^2 + \sum_{n\in A} |\beta_n|^2 - \sum_{n\in A} \overline{\beta_n} < f, u_n > - \sum_{n\in A} \beta_n < u_n, f > \\
&= \|f\|_2^2 + \sum_{n\in A} | < f, u_n > - \beta_n|^2 - \sum_{n\in A} | < f, u_n > |^2 \\
&\geq \|f\|_2^2 - \sum_{n\in A} | < f, u_n > |^2 \\
&= \|f\|_2^2 - < f, f_A > - < f_A, f > + \|f_A\|_2^2 \\
&= < f - f_A, f - f_A > \\
&= \|f - f_A\|_2^2,
\end{aligned}$$

wobei

$$< f, f_A > = \sum_{n\in A} \overline{< f, u_n >} < f, u_n > = < f_A, f >$$

benutzt wurde. □

Wir können damit elementar beweisen, dass die Fourierreihe in $L^2(I)$ konvergiert.

4.33 Lemma. *Es seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I)$ eine (nicht notwendig vollständige) Orthonormalfolge und $f \in L^2(I)$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f in $L^2(I)$, d.h. der Grenzwert*

$$f^* := \sum_{n=1}^{\infty} < f, u_n > u_n$$

existiert in $L^2(I)$.
*Außerdem gilt die **Besselsche Ungleichung***

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < f, u_n > |^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Beweis. Für die endlichen Teilmengen $A_n := \{1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$, der natürlichen Zahlen gilt nach dem Approximationssatz

$$0 \leq \|f - f_A\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} | < f, u_k > |^2,$$

also nach Übergang $n \to \infty$ die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |<f, u_n>|^2 \le \|f\|_2^2 < \infty,$$

so dass der L^2-Grenzwert $f^* := \sum_{n=1}^{\infty} <f, u_n> u_n$ nach Lemma 4.28 (ii) existiert. $\square$

Im Falle von vollständigen Orthonormalfolgen konvergiert die Fourierreihe sogar gegen die "richtige" Funktion, nämlich gegen f:

4.34 Satz. *Es seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I)$ eine vollständige Orthonormalfolge und $f \in L^2(I)$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gegen f in $L^2(I)$:*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} <f, u_n> u_n.$$

Außerdem gilt die ***Parsevalsche Gleichung****:*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |<f, u_n>|^2,$$

die als Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras im unendlichdimensionalen euklidischen Raum betrachtet werden kann.

Beweis. Es sei f^* wie in Lemma 4.33 definiert. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(\star) \qquad <f - f^*, u_n> = <f, u_n> - <f^*, u_n> = 0,$$

da für alle $m \in \mathbb{N}$ unter Setzung von

$$S_m := \sum_{k=1}^{m} <f, u_k> u_k$$

$$<S_m, u_n> = \begin{cases} <f, u_n> & \text{für } m \ge n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt und somit

$$<f^*, u_n> = <\lim_{m\to\infty} S_m, u_n> = \lim_{m\to\infty} <S_m, u_n> = <f, u_n>.$$

Aus der Vollständigkeit von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\star)$ folgt schließlich wie gewünscht $f = f^*$. $\square$

4.35 Bemerkung. Völlig analog zum Beweis des Satzes 4.34 lässt sich ebenfalls beweisen, dass gilt: Ist $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq L^2(I)$ vollständig und orthonormal, so gilt

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} < f, v_n > v_n.$$

4.36 Satz. *Die Orthonormalfolge* $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq L^2([0,2\pi])$ *ist vollständig.*

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir das folgende Dichtheitsresultat aus der Maßtheorie bzw. der Funktionalanalysis:

4.37 Satz. $C_c^\infty([0,2\pi])$ *ist dicht in* $L^2([0,2\pi])$, *d.h. für alle* $f \in L^2([0,2\pi])$ *und alle* $\epsilon > 0$ *existiert ein* $g \in C_c^\infty([0,2\pi])$, *so dass*

$$\|f - g\|_2 < \epsilon.$$

Beweis von Satz 4.36. Für $n \in \mathbb{Z}$ setze $u_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$. Sei $f \in L^2([0,2\pi])$, so dass $< f, u_n >= 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Wir haben zu zeigen, dass $f = 0$ vorliegt.

(I) Zunächst zeigen wir, dass für alle $\phi \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$$< f, \phi >= 0$$

gilt. Sei dazu also $\phi \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Gemäß Bemerkung 4.14 konvergiert die Fourierreihe von ϕ gleichmäßig gegen ϕ:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\phi)(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} < \phi, u_k > u_k(x) = \phi(x) \quad \text{glm. in } x \in [0,2\pi]$$

Insbesondere existiert $M \geq 0$, so dass

$$|S_n(\phi)(x)| \leq M \text{ für alle } x \in [0,2\pi], n \in \mathbb{N},$$

also

$$|f(x)\overline{S_n(\phi)(x)}| \leq M|f(x)| \text{ für alle } x \in [0,2\pi], n \in \mathbb{N},$$

wobei zu beachten ist, dass wegen

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx \leq \|1\|_2\,\|f\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2 < \infty$$

die Funktion $x \mapsto M|f(x)|$ integrierbar ist. Unter Beachtung von $< f, S_n(\phi) >= 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (wegen $< f, u_n >= 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$) folgt damit mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue (Satz von der majorisierten Konvergenz)

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} < f, S_n(\phi) > \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{S_n(\phi)(x)}\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x) \lim_{n\to\infty} \overline{S_n(\phi)(x)}\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)\overline{\phi(x)}\, dx \\ &=< f, \phi > . \end{aligned}$$

(II) Nun zeigen wir durch Approximation mittels des obigen Dichtheitssatzes, dass sogar

$$< f, g >= 0 \text{ für alle } g \in L^2([0, 2\pi])$$

gilt, insbesondere also

$$||f||_2^2 =< f, f >= 0,$$

somit $f = 0$ wie gewünscht.
Sei $g \in L^2([0, 2\pi])$. Aufgrund von Satz 4.37 existiert eine Folge $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty([0, 2\pi])$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \phi_k = g \quad \text{in } L^2([0, 2\pi]),$$

so dass mit der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$0 = \lim_{k\to\infty} < f, \phi_k >=< \lim_{k\to\infty} f, \phi_k >=< f, g >$$

folgt. □

4.38 Folgerung. Es sei $f \in L^2([0, 2\pi])$. Dann konvergieren die partiellen Fouriersummen von f gegen f in $L^2([0, 2\pi])$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} ||f - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}||_2 = \lim_{n\to\infty} ||f - \sum_{k=-n}^{n} < f, u_k > u_x||_2 = 0$$

mit $u_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$. Außerdem gilt

$$(\star) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

Beweis. Die Konvergenzaussage ergibt sich unmittelbar aus der Vollständigkeit von $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ und Satz 4.34 bzw. Bemerkung 4.35. Gleichung $(\star)$ ist die Parsevalsche Gleichung, wenn man $\alpha_n = \sqrt{2\pi}c_n$, $n \in \mathbb{Z}$, bedenkt. □

4.39 Bemerkung. Abschließend sei noch das schwieriger zu beweisende Resultat von Carleson (1966) erwähnt: Ist $f \in L^2([0,2\pi])$, so konvergiert die Fourierreihe von f punktweise fast überall gegen f, d.h. es liegt punktweise Konvergenz bis auf eine Menge vom Maß 0 vor.

4.4 Die Fouriertransformation

4.40 Definition. Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ heißt **schnell fallend**, falls es für alle $(k,m) \in \mathbb{N}_0^2$ ein $c_{k,m} \geq 0$ gibt mit

$$|x^k||\partial^m f(x)| \leq c_{k,m} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

d.h., dass jede Ableitung von f schneller als jede Potenz von $\frac{1}{|x|}$ für $|x| \to \infty$ gegen 0 geht. Der Schwartz-Raum (Raum der schnell fallenden Funktionen) ist dann definiert durch

$$\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \{f \in C^\infty \mid \forall (k,m) \in \mathbb{N}_0^2 : \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k||\partial^m f(x)| < \infty\}.$$

Man prüft leicht nach, dass für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ auch $x^l\partial^n f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ für alle $(l,n) \in \mathbb{N}_0^2$ gilt.

4.41 Beispiel. (i) Die Funktion $f(x) := e^{-x^2}$ gehört $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ an. Dieses sieht man ein aufgrund

$$\partial^m f(x) = P_m(x)f(x)$$

mit einem Polynom P_m und der Tatsache

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{p(x)}{e^{x^2}} = 0$$

für alle Polynome p.

(ii) Ebenso gilt $q(x)e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ für alle Polynome q.

(iii) $C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

4.42 Bemerkung. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ existiert für alle $\xi \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \in \mathbb{C}.$$

Da die Funktion $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ stetig und somit auf jedem Kompaktum integrierbar ist, genügt es nach dem Majorantenkriterium zu zeigen, dass für $\delta > 0$ der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty}\Big(\int_{-R}^{-\delta}|f(x)e^{-ix\xi}|\,dx + \int_{\delta}^{R}|f(x)e^{-ix\xi}|\,dx\Big)$$

existiert. Es gilt nun für $R > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^{-\delta}|f(x)e^{-ix\xi}|\,dx + \int_{\delta}^{R}|f(x)e^{-ix\xi}|\,dx\\
&\le \int_{-R}^{-\delta} c_{2,0}\frac{1}{x^2}\,dx + \int_{\delta}^{R} c_{2,0}\frac{1}{x^2}\,dx\\
&= c_{2,0}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_{-R}^{-\delta} + c_{2,0}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_{\delta}^{R} \to \frac{2c_{2,0}}{\delta} \quad (R\to\infty),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

4.43 Definition. (i) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ heiß die Funktion

$$\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

die **Fouriertransformierte** von f und die Abbildung

$$\mathcal{F}(f) := \hat{f}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

Fouriertransformation.

(ii) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ heiß die Funktion

$$\check{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ \check{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}\,dx$$

die **inverse Fouriertransformierte** von f und die Abbildung

$$\mathcal{F}^{-1}(f) := \check{f}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

inverse Fouriertransformation.

Es stellt sich damit sofort die Frage, ob

(i) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow \hat{f}, \check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$,

(ii) $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) : \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))$?

Beides ist tatsächlich richtig, wie wir später beweisen werden!

4.44 Lemma. *$\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ stellen lineare Transformationen von $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dar und es gilt für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $(k,m) \in \mathbb{N}_0^2$ und $\xi \in \mathbb{R}$*

(i) $(i\xi)^k \partial_\xi^m \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(\partial_x^k\{f(x)(-ix)^m\})(\xi)$,

(ii) $(-i\xi)^k \partial_\xi^m \check{f}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(\partial_x^k\{f(x)(ix)^m\})(\xi)$.

Für den Beweis benötigen wir den folgenden Satz über die Differentiation parameterabhängiger Integrale, dessen Beweis mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue geführt werden kann.

Satz. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine messbare Menge, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : A \times I \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften

(i) Für jedes $t \in I$ sei $x \mapsto f(x,t)$ integrierbar über A,

(ii) Für fast alle $x \in A$ sei $t \mapsto f(x,t)$ differenzierbar in I,

(iii) Es gibt eine integrierbare Majorante $g : A \to [0,\infty]$ für die Funktionen $\frac{\partial f}{\partial t}(.,t)$, $t \in I$,:

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big| \le g(x) \text{ für alle } t \in I, \text{ für fast alle } x \in A.$$

Dann ist $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ für jedes $t \in I$ integrierbar über A und die durch

$$F : I \to \mathbb{C},\ F(t) := \int_A f(x,t)\,dx$$

definierte Funktion ist in I differenzierbar mit Ableitung

$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Beweis von Lemma 4.44. Die Linearität der Abbildungen $\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1}$ folgt unmittelbar aus deren Definitionen. Wir berechnen weiter für alle $(k,m) \in \mathbb{N}_0^2$ und $\xi \in \mathbb{R}$, wobei wir m-mal den obigen Satz über die Differentiation parameterabhängiger Integrale auf die Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \tilde{f}(x,\xi) := f(x)e^{-ix\xi}$$

anwenden, dessen Voraussetzungen elementar nachgeprüft werden:

$$
\begin{aligned}
(i\xi)^k \partial_\xi^m \hat{f}(\xi) &= (i\xi)^k \partial_\xi^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \\
&= (i\xi)^k \partial_\xi^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_\xi^m \{ f(x) e^{-ix\xi} \}\, dx \\
&= (i\xi)^k \partial_\xi^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)^m e^{-ix\xi}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-1)^k(-ix)^m \partial_x^k e^{-ix\xi}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^k \{ f(x)(-ix)^m \} e^{-ix\xi}\, dx \\
&= \mathcal{F}(\partial_x^k \{ f(x)(-ix)^m \})(\xi),
\end{aligned}
$$

wobei in der vorletzten Gleichung partiell integriert wurde unter Ausnutzung der Tatsache, dass der Randterm wegen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ verschwindet. Aus der Gleichung folgt ebenfalls

$$
\begin{aligned}
\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi^k \partial_\xi^m \hat{f}(\xi)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x^k \{ f(x)(-ix)^m \}| \, |e^{-ix\xi}|\, dx \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x^k \{ f(x)(-ix)^m \}|\, dx < \infty,
\end{aligned}
$$

da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Also gilt $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Gleichung (ii) und $\check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ zeigt man völlig analog zu den für $\hat{f}$ durchgeführten Schritten. □

4.45 Bemerkung. Insbesondere gilt für $m = 0, k = 1$ in Lemma 4.44

(i) $(i\xi)\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(\partial_x f)(\xi)$,

(ii) $(-i\xi)\check{f}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(\partial_x f)(\xi)$,

d.h. bei der (inversen) Fouriertransformation wird eine Differentiation bzgl. x überführt in eine bloße Multiplikation mit $(\pm i\xi)$. Diese Eigenschaft gibt der Fouriertransformation eine große Bedeutung, insbesondere für das Lösen von (partiellen) Differentialgleichungen: Man transformiert mittels $\mathcal{F}$ die Differentialgleichung für f in eine algebraische Gleichung für $\hat{f}$ und löst Letztere elementar. Dabei ist entscheidend, dass man durch anschließende Bildung von $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$ auch wieder zu einer Lösung f der ursprünglichen Differentialgleichung gelangt. Die Aussage

$$
\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))
$$

ist tatsächlich für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ richtig, wir beweisen sie hier jedoch nur für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

4.46 Satz (Fourierinversionsformel). *Es sei* $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. *Dann gilt*

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)).$$

Beweis. Wir zeigen hier nur $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$, da die andere Identität völlig analog folgt. Sei $\epsilon > 0$ so klein gewählt, dass $\operatorname{supp} f \subseteq [-\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}]$ und setze

$$g(x) := f(\frac{x}{\pi\epsilon}),\ x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt $\operatorname{supp} g \subseteq [-\pi, \pi]$ und g besitzt eine 2π-periodische C^∞-Fortsetzung auf $\mathbb{R}$, welche wir in eine Fourierreihe entwickeln:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g) e^{inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iny}\, dy\, e^{inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iny}\, dy\, e^{inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}} f(z) e^{-in\pi\epsilon z} \pi\epsilon\, dz\, e^{inx},
\end{aligned}$$

wobei die Substitution $z := \frac{y}{\pi\epsilon}$ benutzt wurde. Also gilt für alle $x \in [-\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}]$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}} f(z) e^{-in\pi\epsilon z}\, dz \Big) e^{in\pi\epsilon x} \pi\epsilon \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-in\pi\epsilon z}\, dz \Big) e^{in\pi\epsilon x} \pi\epsilon \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\pi\epsilon n) e^{in\pi\epsilon x} \pi\epsilon \\
&= \text{Riemannsche Summe von } \xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \text{ der Feinheit } \epsilon\pi \\
&\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi \quad (\epsilon \to 0) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x),
\end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass $\xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}$ wegen $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ integrierbar über $(-\infty, \infty)$ ist. $\square$

4.47 Bemerkung. Die Inversionsformel

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi$$

kann als Darstellung von f in der kontinuierlichen "Basis" $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi x}\right)_{\xi \in \mathbb{R}}$ mit "Koeffizienten" $\hat{f}(\xi)$ aufgefasst werden.

Die folgende Aussage gilt übrigens auch für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

4.48 Satz. *Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dann gilt die* ***Plancherel-Gleichung***

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\check{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Beweis. Für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ setze $f^t(x) := \overline{f(-x)}$ und

$$h(x) := (f * f^t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) f^t(x-y)\, dy.$$

Man verifiziert leicht, dass $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Ferner beobachten wir

$$(\star) \quad h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

Weiterhin berechnen wir

$$\begin{aligned}
(\star\star) \quad \hat{h}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-i\xi x}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) f^t(x-y) e^{-i\xi x}\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \overline{f(y-x)} e^{-i\xi x}\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \overline{f(z)} e^{-i\xi(y-z)}\, dz\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(z)} e^{i\xi z}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy \right|^2 \\
&= \sqrt{2\pi} |\hat{f}(\xi)|^2.
\end{aligned}$$

Mit der Fourierinversionsformel angewandt auf h für $x = 0$ und $(\star)$,$(\star\star)$ können wir schließlich folgern

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = h(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\check{f}(\xi)|^2\, d\xi$ gilt, zeigt man völlig analog. $\square$

4.49 Bemerkung. (i) Man kann $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ auch für Funktionen

$$f \in L^1(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ messbar} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty\}$$

punktweise wie in Definition 4.43 definieren und man kann

$$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) \quad \text{nicht surjektiv}$$

beweisen.

(ii) Durch eine funktionalanalytische Konstruktion, die die Plancherel-Gleichung als Ausgangspunkt verwendet, kann man $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ von $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ auf $L^2(\mathbb{R})$ "hochziehen" (d.h. $\mathcal{F}_{|L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})}, \mathcal{F}^{-1}_{|L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})}$ sind durch Definition 4.43 gegeben), so dass

$$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

bijektive, zueinander inverse isometrische (lineare) Abbildungen werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\check{f}(\xi)|^2\, d\xi, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$