3 Die Integralsätze von Gauß und Stokes

3.1 Der Gaußsche Integralsatz

3.1 Definition. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) ein beschränktes Gebiet und $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. G heißt C^k**–glatt berandet**, falls es zu jedem $a \in \partial G$ eine offene Umgebung $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine k–mal stetig differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} &G \cap U = \{x \in U \,|\, h(x) > 0\} \\ &\partial G \cap U = \{x \in U \,|\, h(x) = 0\} \\ &Dh(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \partial G \cap U. \end{aligned}$$

3.2 Bemerkung. (i) Insbesondere ist im Fall eines beschränkten C^k–glatt berandeten Gebietes G der Rand ∂G eine kompakte $(n-1)$–dimensionale C^k–differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Hierbei sei die Definition einer C^k–differenzierbaren Untermannigfaltigkeit analog zu Kapitel 2 erklärt, d.h. die Regularität der die Untermannigfaltigkeit beschreibenden Abbildungen gehören der Klasse C^k an.
(ii) Lokal liegt G immer auf einer Seite des Randes. Innere Randpunkte, Randkurven, ..., "$(n-2)$-dimensionale" Randmengen sind nicht zugelassen.
(iii) G ist als beschränktes glatt berandetes Gebiet Jordan-messbar, da der Rand eine Jordansche Nullmenge ist. Insbesondere können stetige beschränkte Funktionen über G integriert werden.
(iv) Analog zu Kapitel 2 kann gezeigt werden, dass Definition 3.1 äquivalent ist zu: Für alle $a \in \partial G$ existieren nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten offene Umgebungen $U' = U'(a') \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $U'' = U''(a'') \subset \mathbb{R}$ sowie eine C^k-Funktion $g : U' \to U''$ mit

(i) $G \cap (U' \times U'') = \{x \in U \,|\, x_n > g(x')\}$ oder $G \cap (U' \times U'') = \{x \in U \,|\, x_n < g(x')\}$,
(ii) $\partial G \cap (U' \times U'') = \{x \in U \,|\, x_n = g(x')\}$.

Wir wissen bereits aus Kapitel 2, dass es im Falle einer Hyperfläche in jedem Punkt genau zwei Einheitsnormalenvektoren an Diese gibt. Ist die Hyperfläche der Rand eines beschränkten glatt berandeten Gebietes, so soll im Folgenden festgelegt werden, was die **äußere** Einheitsnormale ist.

3.3 Definition. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) ein beschränktes C^k–glatt berandetes Gebiet und $a \in \partial G$. Dann heißt ein Einheitsnormalenvektor ν von ∂G in a **äußerer Einheitsnormalenvektor**, falls $t_0 > 0$ existiert mit

$$a + t\nu \notin G \text{ für alle } t \in (0, t_0).$$

3.4 Bemerkung. Ist das beschränkte C^k–glatt berandete Gebiet G lokal in der Form wie in Bemerkung 3.2 (iv)

$$\begin{aligned} G \cap U' \times U'' &= \{x \in U \,|\, x_n > g(x')\} \\ \partial G \cap U' \times U'' &= \{x \in U \,|\, x_n = g(x')\} \end{aligned}$$

beschrieben, so gilt für die äußere Einheitsnormale im Punkt $a = (a', a'') \in \partial G$

$$(\star) \quad \nu(a) = \frac{(\nabla g(a'), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla g(a')|^2}}.$$

Beweis. Wir wissen bereits nach Übungsaufgabem dass der gemäß $(\star)$ gewählte Vektor Einheitsnormalenvektor von ∂G in a ist. Setze für $t \in \mathbb{R}$

$$x(t) := (x'(t), x_n(t)) := a + t\nu = (a', a_n) + t\frac{(\nabla g(a'), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla g(a')|^2}}.$$

Nun gilt nach einer Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} x_n(t) - g(x'(t)) &= a_n - \frac{t}{\sqrt{1 + |\nabla g(a')|^2}} - g\left(a' + t\frac{\nabla g(a')}{\sqrt{1 + |\nabla g(a')|^2}}\right) \\ &= a_n - \frac{t}{\sqrt{1 + |\nabla g(a')|^2}} - \left(g(a') + t\Big\langle \nabla g(\xi'(t)), \frac{\nabla g(a')}{\sqrt{1 + |\nabla g(a')|^2}}\Big\rangle\right) \\ &= -t\Big(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(a')|^2}} + \frac{\langle \nabla g(\xi'(t)), \nabla g(a')\rangle}{\sqrt{1 + |\nabla g(a')|^2}}\Big) < 0 \end{aligned}$$

für $t > 0$ klein genug, da $\lim_{t \to 0} < \nabla g(\xi'(t)), \nabla g(a') >= |\nabla g(a')|^2 \geq 0$ gilt. Hierbei ist $\xi'(t)$ eine geeignete Zwischenstelle zwischen a' und $x'(t) = a' + t\frac{\nabla g(a')}{\sqrt{1+|\nabla g(a')|^2}}$. Somit ist $x_n(t) < g(x'(t))$ für $t > 0$ klein genug, woraus $x(t) \notin G$ folgt, was wiederum impliziert, dass die äußere Einheitsnormale durch $(\star)$ gegeben ist. □

3.5 Definition. **(i)** Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann schreiben wir $f \in C^k(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$, falls eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $\overline{G} \subset V$ und eine Funktion $F \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$ existieren

mit $F_{|\overline{G}} = f$, d.h. falls f durch eine stetig differenzierbare auf einer (größeren) offenen Menge lebenden Funktion fortgesetzt werden kann.
(ii) Die **Divergenz** $\operatorname{div} f$ eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $f = (f_1, ..., f_n) \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\operatorname{div} f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x), \;\; x \in \overline{G}.$$

Mit diesen Definitionen können wir den Integralsatz von Gauß formulieren, der als eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung in einer Veränderlichen sowie dessen Folgerungen (siehe Übungen) als Verallgemeinerungen der Regel der partiellen Integrationsregel betrachtet werden können.

3.6 Satz (Gaußscher Integralsatz)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, C^1-glatt berandetes Gebiet, $\nu : \partial G \to S^{n-1}$ die äußere Einheitsnormalenabbildung des Randes. Dann gilt für jedes Vektorfeld $f \in C^k(\overline{G}, \mathbb{R})$ die folgende Identität:*

$$(i) \qquad \int_G \operatorname{div} f(x)\, dx = \int_{\partial G} < f(x), \nu(x) > dS(x).$$

Tatsächlich gilt die Gleichung sogar komponentenweise, d.h. ist $f \in C^k(\overline{G}, \mathbb{R})$, so gilt für alle $i \in \{1, ..., n\}$

$$(ii) \qquad \int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial G} f(x)\nu_i(x) dS(x).$$

3.7 Korollar. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3.6 besitze f kompakten Träger in der offenen Menge G. Dann gilt*

$$\int_G \operatorname{div} f(x)\, dx = 0.$$

3.8 Bemerkung. Tatsächlich gilt der Gaußsche Integralsatz unter allgemeineren Voraussetzungen. So gilt er immer noch, wenn ∂G höchstens $(n-2)$-dimensionale "Ecken" und "Kanten" besitzt, in denen keine Differenzierbarkeit gegeben ist und in denen glatte Stücke von ∂G aneinander treffen. Insbesondere gilt der Gaußsche Integralsatz für Quader und diffeomorphe Bilder von solchen.

Beweis des Satzes. Offenbar folgt Aussage (i) direkt aus (ii), weshalb wir nun (ii) beweisen wollen. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{G} \subset V$. Für jedes $x \in \overline{G}$ wähle eine offene Umgebung $U_x \subset V$ von x. Falls $x \in \partial G$, so wählen wir diese Umgebung in der Form $U_x = U'_x \times U''_x$, wobei U'_x ein $(n-1)$-dimensionales offenes Intervall in $\mathbb{R}^{n-1}$ und U_x'' ein eindimensionales offenes Intervall in $\mathbb{R}$ sind, so dass eine C^1-Funktion $g : U_x' \to U_x''$ existiert mit

$$\begin{aligned} G \cap (U_x' \times U_x'') &= \{y \in U_x \,|\, y_n > g(y')\} \\ \partial G \cap (U_x' \times U_x'') &= \{y \in U_x \,|\, y_n = g(y')\}. \end{aligned}$$

Tatsächlich ist Dieses möglich, wobei wir o.B.d.A. von ">" in der ersten Zeile ausgehen dürfen. Offenbar gilt $\overline{G} \subset \bigcup_{x \in \overline{G}} U_x$ und, da $\overline{G}$ kompakt ist, existieren $U_1, ..., U_J, U_{J+1}, ..., U_L \subset V$ mit $U_j = U_{x_j}$, so dass $\overline{G} \subset \bigcup_{j=1}^L U_j$. Diese Umgebungen seien zudem so durchnummeriert, dass

$$\begin{aligned} &\forall j = 1, ..., J : \; U_j \cap \partial G \neq \varnothing \\ &\forall j = J+1, ..., L : \; U_j \subset G. \end{aligned}$$

Wähle nun eine der Überdeckung $\{U_1, ..., U_L\}$ untergeordnete Partition der Eins $\Psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$, $j = 1, ..., L$, so dass

$$\operatorname{supp} \Psi_j \subset U_j, \quad \sum_{j=1}^L \Psi_j(x) = 1 \text{ für alle } x \in \overline{G}.$$

Dann folgen

$$\begin{aligned} \int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx &= \sum_{j=1}^L \int_{G \cap U_j} \frac{\partial}{\partial x_i}(\Psi_j(x) f(x))\, dx \\ \int_{\partial G} f(x) \nu_i(x)\, dS(x) &= \sum_{j=1}^L \int_{\partial G \cap U_j} (\Psi_j(x) f(x)) \nu_i(x)\, dS(x). \end{aligned}$$

Damit genügt es, die beiden folgenden Behauptungen zu beweisen:

$$\begin{aligned} &(I) \quad \forall j = 1, ..., J, \forall f \in C_c^1(U_j) : \int_{G \cap U_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial G \cap U_j} f(x) \nu_i(x)\, dS(x) \\ &(II) \quad \forall j = J+1, ..., L, \forall f \in C_c^1(U_j) : \int_{G \cap U_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx = 0. \end{aligned}$$

Wir beweisen zunächst Aussage (II). Sei dazu $R > 0$ so groß gewählt, dass $[-R, R]^n \supset U_j$. Da $\operatorname{supp} f \subset U_j$, kann f durch 0 stetig differenzierbar auf $[-R, R]^n$ fortgesetzt werden. Die Fortsetzung sei wieder durch bezeichnet. Es gilt dann mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{G\cap U_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,dx &= \int_{U_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,dx \\
&= \int_{[-R,R]^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,dx \\
&= \int_{-R}^{R} \dots \int_{-R}^{R} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,dx_i\,dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \\
&= \int_{-R}^{R} \dots \int_{-R}^{R} \underbrace{[f(x)]_{-R}^{R}}_{=0}\,dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nun beweisen wir (I). Aufgrund unserer Wahl der Umgebungen der Randpunkte und Bemerkung 3.4 gilt für die äußere Einheitsnormale

$$\nu(x) = \nu(x', g(x')) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(x')|^2}} (\nabla g(x'), -1).$$

Außerdem gilt für die Wurzel der Gramschen Determinante $\tilde{g}$

$$\sqrt{\tilde{g}(x', g(x'))} = \sqrt{1 + |\nabla g(x')|^2},$$

siehe Übungsaufgabe. Setze

$$\alpha := \sup U_j''.$$

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle:

$$\begin{aligned}
&(a) \quad i \in \{1, \dots, n-1\} \\
&(b) \quad i = n.
\end{aligned}$$

Wir behandeln zunächst Fall (a). Zunächst gilt nach Übungsaufgabe

$$(\star) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{g(x')}^{\alpha} f(x', x_n)\,dx_n = -f(x', g(x')) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x') + \int_{g(x')}^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', x_n)\,dx_n.$$

Wir benutzen im Folgenden die folgenden Notationen:

$$\begin{aligned}
U_j' &= U_j'(1) \times \dots \times U_j'(n-1), \\
U_{j,\hat{i}}' &= U_j'(1) \times \dots \times U_j'(i-1) \times U_j'(i+1) \times \dots \times U_j'(n-1), \\
x_{\hat{i}}' &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
(\star\star)\quad & \int_{U'_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{g(x')}^{\alpha} f(x', x_n) dx_n \, dx' \\
&= \int_{U'_{j,\hat{i}}} \int_{\inf U'_j(i)}^{\sup U'_j(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{g(x')}^{\alpha} f(x', x_n) dx_n \, dx_i \, dx'_{\hat{i}} \\
&= \int_{U'_{j,\hat{i}}} \left(\int_{g(x'_{\hat{i}}, \sup U'_j(i))}^{\alpha} \underbrace{f(x'_{\hat{i}}, \sup U'_j(i), x_n)}_{=0} dx_n - \int_{g(x'_{\hat{i}}, \inf U'_j(i))}^{\alpha} \underbrace{f(x'_{\hat{i}}, \inf U'_j(i), x_n)}_{=0} dx_n \right) dx'_{\hat{i}} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

wobei $\operatorname{supp} f \subset U_j$ benutzt wurde. Mit $(\star)$ und $(\star\star)$ können wir damit folgern:

$$
\begin{aligned}
\int_{G \cap U_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \, dx &= \int_{U'_j} \int_{g(x')}^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', x_n) \, dx_n \, dx' \\
&= \int_{U'_j} f(x', g(x')) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x') \, dx' \\
&= \int_{U'_j} f(x', g(x')) \nu_i(x', g(x')) \sqrt{1 + |\nabla g(x')|^2} \, dx' \\
&= \int_{\partial G \cap U_j} f(x) \nu_i(x) \, dS(x).
\end{aligned}
$$

Zuletzt behandeln wir den Fall (b), d.h. $i = n$. Hier können wir direkt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden:

$$
\begin{aligned}
\int_{G \cap U_j} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \, dx &= \int_{U'_j} \int_{g(x')}^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n) \, dx_n \, dx' \\
&= \int_{U'_j} \Big(\underbrace{f(x', \alpha)}_{=0} - f(x', g(x')) \Big) dx' \\
&= \int_{U'_j} -f(x', g(x')) \, dx' \\
&= \int_{U'_j} f(x', g(x')) \nu_n(x', g(x')) \sqrt{1 + |\nabla g(x')|^2} \, dx' \\
&= \int_{\partial G \cap U_j} f(x) \nu_n(x) \, dS(x),
\end{aligned}
$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. □

3.9 Bemerkung (Physikalische Interpretation der Divergenz)**.** Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares (physikalisches) Vektorfeld (etwa ein elektrisches oder magnetisches Feld oder aber eine Stromdichte) und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein (glatt berandeter) Körper mit äußerer Einheitsnormale ν, so misst

$$\int_{\partial G} < f(x), \nu(x) > dS(x),$$

wieviel Feld aus G aus- bzw. eintritt. Ist dieses Flussintegral von Null verschieden, so gilt keine "Massenerhaltung" und man interpretiert aufgrund des Zusammenhangs

$$\int_G \operatorname{div} f(x)\, dx = \int_{\partial G} < f(x), \nu(x) > dS(x),$$

und eines gedachten Grenzwertprozesses $G \searrow \{x_0\}$, bei welchem G zum Punkt x_0 "zusammengezogen" wird, die Divergenz $\operatorname{div} f(x_0)$ als **lokale Quelldichte** des Feldes im Punkt x_0.

3.10 Beispiel. **(i)** Sei S^{n-1} die $(n-1)$–dimensionale Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ und $B_1(0)$ die Einheitskugel. Wendet man den Gaußschen Integralsatz auf das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) := x$ mit $\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n$ an, so erhält man unter Beachtung von $\nu(x) = x$ für die äußere Einheitsnormale von $B_1(0)$

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_{n-1}(S^{n-1}) &:= A(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} 1\, dS(x) = \int_{S^{n-1}} < f(x), \nu(x) > dS(x) \\ &= \int_{B_1(0)} \operatorname{div} f(x)\, dx = \int_{B_1(0)} n\, dx = n \operatorname{vol}_n(B_1(0)), \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{\operatorname{vol}_{n-1}(S^{n-1})}{\operatorname{vol}_n(B_1(0))} = n.$$

(ii) (Archimedisches Prinzip) Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein C^1–glatt berandeter physikalischer Körper, der sich in einer Flüssigkeit der konstanten Dichte $c > 0$ befinde. Die Oberfläche der Flüssigkeit stimme mit der Ebene $x_3 = 0$ überein.
Es übt im Punkt $x \in \partial G$ die Flüssigkeit auf den Körper einen Druck der Größe

$$c x_3 \nu(x)$$

aus. Für die Auftriebskraft erhält man damit durch Bildung des Oberflächenintegrals

$$F = \int_{\partial G} c x_3 \nu(x)\, dS(x)$$

bzw. für jede Komponente F_i, $i = 1, 2, 3$

$$F_i = \int_{\partial G} c x_3 \nu_i(x)\, dS(x) = \int_G c \frac{\partial x_3}{\partial x_i}\, d(x) = c \int_G \delta_i^3\, dx,$$

d.h.

$$F_1 = F_2 = 0 \text{ und } F_3 = c \operatorname{vol}_3(G).$$

F_3 ist also die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

3.2 Der klassische Integralsatz von Stokes

Wir wollen einen weiteren Integralsatz herleiten, der ein Oberflächenintegral über eine zweidimensionale Fläche im $\mathbb{R}^3$ verwandelt in ein Integral über die Randkurve der Fläche.

3.11 Definition. Es sei $O \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f : O \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist die **Rotation** $\operatorname{rot} f$ von f definiert als das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} f := \nabla \times f = \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big).$$

3.12 Satz (Klassischer Integralsatz von Stokes)**.** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $X : U \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung der Klasse $C^2(U, \mathbb{R}^3)$ und $G \subset U$ ein einfach zusammenhängendes, C^1–glatt berandetes Gebiet, welches von der C^1–Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ regulär parametrisiert wird, so dass*

(i) $\dot\gamma(t) \neq 0$

(ii) $\operatorname{spur}(\gamma) = \partial G$

(iii) $\gamma_{|[a,b)}$ *injektiv und* $\gamma(a) = \gamma(b)$

(iv) γ *durchläuft die äußere Randkurve von G gegen den Uhrzeigersinn, d.h.* $\dfrac{1}{|\dot\gamma(t)|}(\dot\gamma_2(t), -\dot\gamma_1(t))$ *ist die äußere Einheitsnormale an G im Punkt $\gamma(t) \in \partial G$.*

Ferner sei auf der Fläche das Einheitsnormalenfeld

$$N : X(U) \to S^2,\ N(u, v) := \frac{D_uX(u, v) \times D_vX(u, v)}{|D_uX(u, v) \times D_vX(u, v)|}$$

betrachtet. Schließlich sei zu $O \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $O \supset X(U)$ ein C^1–Vektorfeld $f : O \to \mathbb{R}^3$ zugrunde gelegt. Dann gilt

$$\int_{X(G)} < \operatorname{rot} f, N > dS = \int_a^b < f(X(\gamma(t))), \frac{d}{dt}X(\gamma(t)) > dt =: \int_{\partial X(G)} < f, \tau > ds,$$

*wobei τ den Tangentenvektor der orientierten Randkurve $t \mapsto X(\gamma(t))$ bezeichne und der Ausdruck $\int_{\partial X(G)} < f, \tau > ds$ auch als **Kurvenintegral** des Feldes f längs $\partial X(G)$ bezeichnet wird.*

3.13 Bemerkung. (a) In der Situation von Satz 3.12 ist der normierte Tangentenvektor von γ durch $\frac{1}{|\dot\gamma(t)|}(\dot\gamma_1(t), \dot\gamma_2(t))$ gegeben. Ist die äußere Einheitsnormale an ∂G im Punkt $\gamma(t)$ durch

$$\nu(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{(\dot\gamma_1(t), \dot\gamma_2(t))}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{1}{|\dot\gamma(t)|}(\dot\gamma_2(t), -\dot\gamma_1(t))$$

gegeben, d.h. durch eine Drehung des Tangentenvektors um 90 Grad im Uhrzeigersinn, so liegt das Gebiet G stets zur **Linken** eines Betrachters, der entlang der Randkurve im Durchlaufsinn von γ wandert, d.h. in Richtung der Tangente blickt. In dem Fall durchläuft der Betrachter die Randkurve von G **gegen** den Uhrzeigersinn.
(b) Der Satz von Stokes gilt allgemein für (kompakte Teilmengen) **orientierbare(r)** zweidimensionaler Flächen M im $\mathbb{R}^3$, d.h. solche Flächen, auf denen man ein stetiges Einheitsnormalenfeld $N : M \to S^2$ finden kann. Beachte, dass es nicht-orientierbare Flächen wie z.B. das Möbiusband gibt:

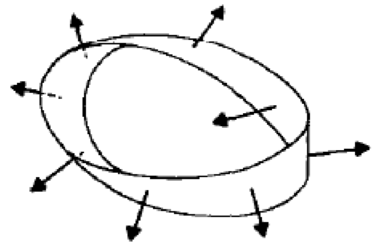

Abbildung 3.1: *Möbiusband: "Läuft man einmal herum, landet man auf der anderen Seite."*

Die Orientierungen der Fläche und der Randkurve müssen dabei aufeinander abgestimmt sein, so dass der Vektor

$$\tau \times N$$

in jedem Randpunkt von M von der Fläche weg zeigt.
(c) Die Voraussetzung, dass die Fläche der Klasse C^2 angehört, kann durch Approximationsüberlegungen auf C^1 abgeschwächt werden, siehe Übungsaufgabe.

Um den klassischen Satz von Stokes zu beweisen, benötigen wir in unserer Beweisstrategie, welche auf die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes abzielt, das folgende Lemma:

3.14 Lemma. *Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $X : U \to \mathbb{R}^3 \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$, $O \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $O \supset X(U)$ und $f : O \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld der Klasse C^1. Dann gilt in allen $(u, v) \in U$*

$$< \operatorname{rot} f \circ X, D_u X \times D_v X > = \frac{\partial}{\partial u} < f(X), D_v X > - \frac{\partial}{\partial v} < f(X), D_u X > .$$

Insbesondere lässt sich also die linke Seite der Gleichung in Divergenzform bringen.

Beweis. Wir berechnen für alle $(u,v) \in U$

$$\begin{aligned}< \operatorname{rot} f(X), D_u X \times D_v X > &= \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\Big)\Big(\frac{\partial X_2}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial v} - \frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial X_2}{\partial v}\Big)\\ &+ \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v} - \frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial v}\Big)\\ &+ \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big)\Big(\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial X_2}{\partial v} - \frac{\partial X_2}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v}\Big).\end{aligned}$$

Man beachte dabei die Schreibweise $\operatorname{rot} f \circ X = \operatorname{rot} f(X)$, d.h. in $\operatorname{rot} f(X)$ wird die Rotation von f bzgl. der Variablen (x_1, x_2, x_3) gebildet und dieser Ausdruck dann an der Stelle $X(u,v)$ ausgewertet. Nach Einfügen nahrhafter Nullen und Benutzung der Kettenregel hat man damit

$$\begin{aligned}< \operatorname{rot} f(X), D_u X \times D_v X > &= \frac{\partial(f_1 \circ X)}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v} - \frac{\partial(f_1 \circ X)}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial u}\\ &+ \frac{\partial(f_2 \circ X)}{\partial u}\frac{\partial X_2}{\partial v} - \frac{\partial(f_2 \circ X)}{\partial v}\frac{\partial X_2}{\partial u}\\ &+ \frac{\partial(f_3 \circ X)}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial v} - \frac{\partial(f_3 \circ X)}{\partial v}\frac{\partial X_3}{\partial u}\\ &= \langle\frac{\partial(f \circ X)}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\rangle - \langle\frac{\partial(f \circ X)}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u}\rangle\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\langle f \circ X, \frac{\partial X}{\partial v}\rangle - \frac{\partial}{\partial v}\langle f \circ X, \frac{\partial X}{\partial u}\rangle,\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung benutzt wurde, dass sich die Terme mit $\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}$ wegkürzen. □

Beweis des Satzes von Stokes. In der durch X gegebenen Parametrisierung gilt nach Beispiel 2.28(ii) für die Wurzel der Gramschen Determinante:

$$\sqrt{g(u,v)} = \Big|D_u X(u,v) \times D_v X(u,v)\Big|$$

und somit nach Anwendung von Lemma 3.14 und des Gaußschen Integralsatzes auf das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, dessen äußere Einheitsnormale in der Parametrisierung γ des Randes ∂G durch

$$\nu = \nu(t) = \frac{1}{|\dot\gamma(t)|}(\dot\gamma_2(t), -\dot\gamma_1(t))$$

gegeben ist:

$$
\begin{aligned}
&\int_{X(G)} < \operatorname{rot} f, N > dS \\
&= \int_G \langle \operatorname{rot} f(X(u,v)), \frac{D_u X(u,v) \times D_v X(u,v)}{|D_u X(u,v) \times D_v X(u,v)|} \rangle |D_u X(u,v) \times D_v X(u,v)| \, dudv \\
&= \int_G \langle \operatorname{rot} f(X(u,v)), D_u X(u,v) \times D_v X(u,v) \rangle \, dudv \\
&= \int_G \frac{\partial}{\partial u} < f(X(u,v)), D_v X(u,v) > - \frac{\partial}{\partial v} < f(X(u,v)), D_u X(u,v) > \, dudv \\
&= \int_{\partial G} \Big\langle \Big(< f \circ X, D_v X >, - < f \circ X, D_u X > \Big), \nu \Big\rangle \, dS \\
&= \int_a^b \Big(\Big\langle f(X(\gamma(t))), D_v X(\gamma(t)) \Big\rangle \frac{\dot\gamma_2(t)}{|\dot\gamma(t)|} + \Big\langle f(X(\gamma(t))), D_u X(\gamma(t)) \Big\rangle \frac{\dot\gamma_1(t)}{|\dot\gamma(t)|} \Big) |\dot\gamma(t)| \, dt \\
&= \int_a^b \Big\langle f(X(\gamma(t))), \frac{d}{dt} X(\gamma(t)) \Big\rangle \, dt,
\end{aligned}
$$

d.h.

$$\int_{X(G)} < \operatorname{rot} f, N > dS = \int_{\partial X(G)} < f, \tau > \, ds.$$

Bedenke, dass im Falle der "Karte" $\gamma : [a,b] \to \partial G$ die Wurzel der Gramschen Determinante gegeben ist durch

$$\sqrt{g_\gamma} = \sqrt{< \dot\gamma, \dot\gamma >} = |\dot\gamma|.$$

□

3.15 Bemerkung (Physikalische Interpretation der Rotation)**.** Sei M eine kompakte, orientierbare, glatt berandete zweidimensionale Fläche im $\mathbb{R}^3$, $O \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $O \supset M$ und $f : O \to \mathbb{R}^3 \in C^1(O, \mathbb{R}^3)$ ein physikalisches Vektorfeld (z.B. ein Strömungs(-geschwindigkeits)feld in einem Fluid). Das Kurvenintegral

$$\int_{\partial M} < f, \tau > \, ds$$

heißt **Zirkulation** des Feldes f entlang der Randkurve ∂M.
Rein heuristisch hat man

$$
\begin{aligned}
\int_M < \operatorname{rot} f, N > dS &=< \operatorname{rot} f(a'), N(a') > \int_M 1 \, dS \\
&=< \operatorname{rot} f(a'), N(a') > \operatorname{vol}_2(M)
\end{aligned}
$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle $a' \in M$ (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Somit erhält man für einen festen Punkt $p \in M$ durch Grenzübergang unter Anwendung des Satzes von Stokes

$$\lim_{M \searrow p} \Big(\frac{1}{\mathrm{vol}_2(M)} \int_{\partial M} < f, \tau > ds \Big) = \lim_{M \searrow p} \Big(\frac{1}{\mathrm{vol}_2(M)} \int_{M} < \mathrm{rot}\, f, N > dS \Big)$$
$$=< \mathrm{rot}\, f(p), N(p) >,$$

wobei $a' \to p$ benutzt wurde. Der Grenzwert ist dabei im folgenden Sinne zu verstehen: Für alle $\epsilon > 0$ existiert eine Umgebung $U \subset M$ von p, so dass

$$\Big| \frac{1}{\mathrm{vol}_2(M')} \int_{\partial M'} < f, \tau > ds - < \mathrm{rot}\, f(p), N(p) > \Big| < \epsilon$$

für alle glatt berandeten kompakten Teilflächen $M' \subset M$ mit $p \in M' \subset U$. Der Limes

$$\lim_{M \searrow p} \Big(\frac{1}{\mathrm{vol}_2(M)} \int_{\partial M} < f, \tau > ds \Big)$$

heißt **Wirbeldichte** von f in p **bzgl. der Achse** $\nu = N(p)$.

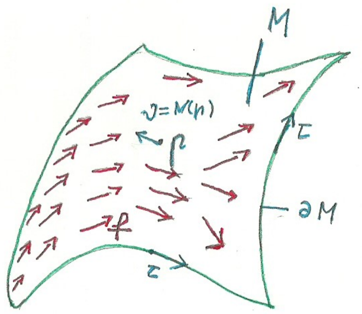

Abbildung 3.2: *Von Vektorfeld durchströmte Fläche mit Randkurve*

Offenbar lässt sich zu jedem $\nu \in S^2$ eine Fläche M und ein Punkt $p \in M$ finden, so dass "der" Einheitsnormalenvektor von M in p gerade durch ν gegeben ist. Dazu kann man z.B. eine geeignete Ebene wählen. Aufgrund der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, aus welcher

$$< \mathrm{rot}\, f(p), N(p) > \le < \mathrm{rot}\, f(p), \frac{\mathrm{rot}\, f(p)}{|\mathrm{rot}\, f(p)|} >$$

folgt, wobei $\mathrm{rot}\, f(p) \neq 0$ vorausgesetzt sei, wird die Wirbeldichte also für die Achse $\nu = \frac{\mathrm{rot}\, f(p)}{|\mathrm{rot}\, f(p)|}$ maximal, weshalb $\mathrm{rot}\, f$ auch der **Wirbelvektor** des Feldes f genannt wird.