Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Stoffers

Sommersemester 2013
03. Juli 2013

Elementare Differentialgeometrie
11. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei S eine reguläre Fläche und $(U,F,V),(\hat{U},\hat{F},\hat{V})$ zwei lokale Parametrisierungen mit $S\cap V\cap \hat{V}\neq\emptyset$. Für $p\in S\cap V\cap\hat{V}$ schreibe weiter $u:=F^{-1}(p)$ und $\hat{u}:=\hat{F}^{-1}(p)$.

$$G:=\hat{F}^{-1}\circ F: F^{-1}(S\cap V\cap\hat{V})\to\hat{F}^{-1}(S\cap V\cap\hat{V})$$

sei die Koordinatenwechselabbildung und $DG(u):=\left(b^i_j\right)^2_{i,j=1}$, $DG(u)^{-1}:=\left(\hat{b}^j_i\right)^2_{i,j=1}$. Beweisen Sie die folgenden Transformationsformeln für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform und die Matrixkoeffizienten der Weingartenabbildung bezüglich der Basis $\frac{\partial F}{\partial u_1}(u),\frac{\partial F}{\partial u_2}(u)$ bzw. $\frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{u}_1}(\hat{u}),\frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{u}_2}(\hat{u})$:

(a) $\hat{h}_{ij}(\hat{u})=\sum_{k,l=1}^2\hat{b}^l_i h_{lk}(u)\hat{b}^k_j,\ i,j=1,2$ (2−fach kovariant),

(b) $\hat{h}^i_j(\hat{u})=\sum_{k,l=1}^2 b^i_k h^k_l(u)\hat{b}^l_j\ i,j=1,2$ (1−fach kovariant, 1−fach kontravariant).

Sei $S\subset\mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $c:I\to S$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Falls $\dot{c}(t)$ für alle $t\in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, so heißt c **Krümmungslinie**.

Aufgabe 2. $*$ (7+7=14 Punkte)
Wie in Serie 9, Aufgabe 2 sei $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, $a>0$, eine glatte strikt positive Funktion. Betrachten Sie den Graph von $f|_{(0,a)}$ in $\mathbb{R}^3$, d.h. die Menge

$$\mathcal{G}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=f(x),\ z=0 \text{ und } x\in(0,a)\}.$$

Sei S die Menge der Punkte, die man aus $\mathcal{G}(f)$ durch Rotation bezüglich der Achse $(1,0,0)^t$ erhält.

(a) Berechnen Sie die zweite Fundamentalform und die Weingartenabbildung von S in den lokalen Koordinaten

$$(x,\varphi)\mapsto(x,f(x)\cos\varphi,f(x)\sin\varphi)^t.$$

(b) Berechnen Sie die Hauptkrümmungen von S. Finden Sie eine Familie von Krümmungslinien.

Aufgabe 3. Sei $S\subset\mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit glattem Einheitsnormalenvektorfeld $N:S\to\mathbb{S}^2$ und $p\in S$. Sei weiter $X\in T_pS$ mit $|X|=1$. Wir betrachten die von $N(p)$ und X aufgespannte Ebene E, welche durch p verläuft. Man zeige, dass eine offene Umgebung $V\subset\mathbb{R}^3$ von p existiert, so dass die Menge $S\cap E\cap V$ durch eine reguläre Kurve parametrisiert werden kann.

Hinweis: Man versuche eine Umgebung $V\subset\mathbb{R}^3$ von p zu finden, so dass sich die Menge $S\cap E\cap V$ als Nullstellengebilde einer geeigneten $\mathbb{R}^2-$wertigen Funktion darstellen lässt. Wende nun den Satz über implizite Funktionen an (Voraussetzungen überprüfen!).

Ihre Lösungen der mit einem Stern versehenen Aufgabe geben Sie bitte am Donnerstag, den 11.07.2013 in der Übung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung am Donnerstag, den 11.07.2013 vor.