Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Stoffers

Sommersemester 2013
24. April 2013

Elementare Differentialgeometrie
2. Übungsblatt

1. Aufgabe
Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve, so dass $|c(t)| \leq R$ für ein $R > 0$ und alle $t \in I$, d.h. c verläuft innerhalb der Kreisscheibe mit Radius R um den Nullpunkt. Man zeige: Wenn die Kurve für einen inneren Punkt $t_0 \in I^\circ$ den Rand der Kreisscheibe mit $|c(t_0)| = R$ berührt, so ist dort $|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{R}$.

Hinweis: Man betrachte die Ableitungen $\frac{d}{dt}|c(t)|^2$ und $\frac{d^2}{dt^2}|c(t)|^2$ an der Stelle $t = t_0$.

2. Aufgabe $*$ (5+2+3+5=15 Punkte)
Wir lassen in der (x, y)-Ebene eine Kreisscheibe vom Radius 1 in Richtung der positiven x-Achse abrollen. Eine zweite Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ habe denselben Mittelpunkt und sei fest mit der ersten verbunden.

(a) Man begründe: Die sogenannte Zykloide $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$c(t) := \begin{pmatrix} t - r\sin(t) \\ 1 - r\cos(t) \end{pmatrix},$$

beschreibt dann eine Bahn, die ein Punkt auf dem Rand der zweiten Kreisscheibe durchläuft.

(b) Man skizziere die parametrisierte Kurve für die Fälle $r < 1$, $r = 1$, $r > 1$.

(c) In welchen Fällen ist die parametrisierte Kurve regulär?

(d) Im Falle $r = 1$ bestimme man die Länge der Kurve für einen Umlauf der Kreisscheibe.

3. Aufgabe
Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(a) = c(b)$. Man zeige, dass für die **Totalkrümmung** der Kurve

$$\int_a^b |\kappa(t)|\, dt \geq \pi$$

gilt.

Hinweis: Man nehme $\int_a^b |\kappa(t)|\, dt < \pi$ an und leite daraus einen Widerspruch her. Dazu wähle man eine Drehwinkelfunktion $\vartheta : [a, b] \to \mathbb{R}$ für $t \mapsto \dot{c}(t) = v(t)$ und zeige für diese die Relation $0 \leq \max_{t\in[a,b]} \vartheta(t) - \min_{t\in[a,b]} \vartheta(t) < \pi$, woraus man die Existenz eines $w \in \mathbb{S}^1$ mit $\langle \dot{c}(t), w \rangle > 0$ für alle $t \in [a, b]$ folgere. Nun integriere man von a bis b.

4. Aufgabe

Betrachten Sie die Kurve $c : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $c(t) := \big(2\cos(t) + 1\big)\big(\cos(t), \sin(t)\big)^T$.

(a) Zeigen Sie, dass diese Kurve geschlossen ist und finden Sie die minimale Periode L. Ist c einfach geschlossen?

(b) In der Vorlesung wurde die Umlaufzahl für geschlossene nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven definiert. Man gebe eine allgemeine (mit der oben zitierten Definition im Spezialfall von nach der Bogenlänge parametrisierten Kurven verträgliche) Definition für die Umlaufzahl einer geschlossenen regulären ebenen Kurve mit Hilfe einer Drehwinkelfunktion an. Man zeige dann die Gültigkeit von

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) |\dot{c}(t)| \; dt \; .$$

(c) Bestimmen Sie die Umlaufzahl n_c der oben gegebenen Kurve c.

Ihre Lösungen der mit einem Stern versehenen Aufgabe(n) geben Sie bitte am Donnerstag, den 02.05.2013 in der Übung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung am Donnerstag, den 02.05.2013 vor.