Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Stoffers

Sommersemester 2013
02. Mai 2013

Elementare Differentialgeometrie
3. Übungsblatt

1. Aufgabe
Ist jede periodische Funktion $\kappa \in C^\infty(\mathbb{R})$ Krümmung einer geschlossenen, nach der Bogenlänge parametrisierten ebenen Kurve? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

2. Aufgabe $*$ (3+4+5+4=16 Punkte)
Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Sei $n(t)$ das Einheitsnormalenvektorfeld an die Kurve wie in der Vorlesung und $\kappa(t)$ die Krümmung. Nehmen Sie an, dass $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. In dieser Situation heißt die Kurve

$$b(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t), \quad t \in I,$$

die **Evolute (Brennkurve)** von c.

(a) Wann ist die parametrisierte Kurve b regulär?

(b) Zeigen Sie, dass die Tangente an b in $b(t)$ normal zu c in $c(t)$ ist.

(c) Betrachten Sie die Normalen an c in zwei benachbarten Punkten t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$. Zeigen Sie, dass für $t_1 \to t_2$ die Schnittpunkte der Normalen gegen einen Punkt auf der Evolute von c konvergieren.

(d) Die parametrisierte Kurve $c(t) = (t, \cosh(t))$, $t \in \mathbb{R}$, heißt Kettenlinie. Man finde eine Parametrisierung der Evolute von c.

3. Aufgabe
Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte periodische Kurve mit minimaler Periode L. Zeigen Sie:

(a) Ist c einfach geschlossen, so ist c konvex genau dann, wenn für die Totalkrümmung gilt:

$$\int_0^L |\kappa(t)| \, dt = 2\pi \ .$$

(b) Jede Kurve wie in der obigen Voraussetzung mit Totalkrümmung 2π ist einfach geschlossen und konvex.

Hinweis: Für den Beweis in (b) benutze man das verschärfte Resultat $\int_a^b |\kappa(t)| \, dt > \pi$ unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Aufgabe 3, Serie 2.

4. Aufgabe
Man zeige, dass die Krümmung orientierter ebener Kurven invariant unter orientierungsgerhaltenden Bewegungen F (d.h. $F(x) = Ax + b$ mit $A \in SO(2) := \{B \in O(2) | \det B = 1\}$ und $b \in \mathbb{R}^2$) ist.

Ihre Lösungen der mit einem Stern versehenen Aufgabe geben Sie bitte am Donnerstag, den 16.05.2013 in der Übung ab.
Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung am Donnerstag, den 16.05.2013 vor.