Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Stoffers

Sommersemester 2013
15. Mai 2013

Elementare Differentialgeometrie
4. Übungsblatt

1. Aufgabe
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ mit $A \neq B$ und $l > 0$ mit $l > |A - B|$. Zeigen Sie, dass die Verbindungskurve der Länge l zwischen A und B, die zusammen mit $\overline{AB}$ den größtmöglichen Flächeninhalt umschließt, ein Kreisbogen durch A und B ist.

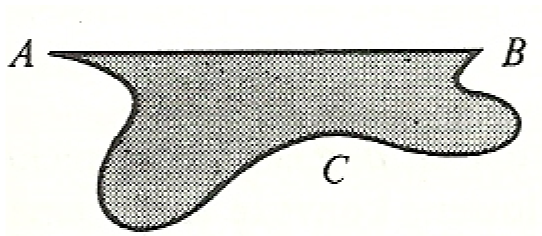

Abbildung 1: Bild aus "Differentialgeometrie von Kurven und Flächen", M. Do Carmo

Hinweis: Man kann benutzen, dass die isoperimetrische Ungleichung auch für nur stückweise differenzierbare einfach geschlossene Kurven gilt.

2. Aufgabe $*$ (3+5+7=15 Punkte)
Eine ebene Kurve sei in Polarkoordinaten, d.h. durch $\varphi \mapsto r(\varphi)\,(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Bogenlänge im Intervall $[\varphi_1, \varphi_2]$ gegeben ist durch

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi\,,$$

wobei $r' = \frac{d}{d\varphi} r$.

(b) Zeigen Sie, dass die Krümmung durch

$$\kappa(\varphi) = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

gegeben ist.

(c) Ist die Kurve mit $r(\varphi) = \cos(2\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, regulär? Skizzieren Sie die Kurve. Berechnen Sie gegebenenfalls die Umlaufzahl der Kurve.

3. Aufgabe
Es sei $c : [0, l(c)] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene konvexe nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, die positiv orientiert ist und $r > 0$ eine Konstante. Die Kurve

$$\beta : [0, l(c)] \to \mathbb{R}^2, \; \beta(t) := c(t) - rn(t),$$

wobei n der Normalenvektor von c ist, heißt eine **Parallelkurve** zu c (mit Abstand r). Man beweise:

(a) $l(\beta) = l(c) + 2\pi r$

(b) $A(\beta) = A(c) + rl(c) + \pi r^2$.

Hierbei bezeichnet $A(\tilde{c})$ den Flächeninhalt des beschränkten Gebietes, das von einer einfach geschlossenen Kurve $\tilde{c}$ berandet wird.

Hinweis zu (b): Man verwende eine in der Vorlesung bereitgestellte Formel für $A(\tilde{c})$.

4. Aufgabe
Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Raumkurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Man finde das Transformationsverhalten von Krümmung, Torsion und des begleitenden Dreibeins von c unter Bewegungen des euklidischen Raumes.

Ihre Lösungen der mit einem Stern versehenen Aufgabe(n) geben Sie bitte am Donnerstag, den 23.05.2013 in der Übung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung am Donnerstag, den 23.05.2013 vor.