Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Stoffers

Sommersemester 2013
19. Juni 2013

Elementare Differentialgeometrie
9. Übungsblatt

1. Aufgabe

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge.

 (i) Begründen Sie, dass $S_1 := U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche ist.

 (ii) Sei $S_2 := \{(x, y, \varphi(x, y))^t : (x, y) \in U\}$ mit einer glatten Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Flächen S_1 und S_2 diffeomorph sind.

(b) Seien

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}, \\ S_2 &:= \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \end{aligned}$$

mit $a, b, c > 0$.

 (i) Begründen Sie, dass S_1 und S_2 reguläre Flächen sind.

 (ii) Zeigen Sie, dass S_1 und S_2 diffeomorph sind.

2. Aufgabe $*$ (3+5+2+6=16 Punkte)
Sei $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, eine glatte Funktion. Betrachten Sie den Graph von $f|_{(0,a)}$ in $\mathbb{R}^3$, d.h. die Menge

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = f(x),\ z = 0 \text{ und } x \in (0, a)\}.$$

Sei S die Menge der Punkte, die man aus $\mathcal{G}(f)$ durch Rotation bezüglich der Achse $(1, 0, 0)^t$ erhält.

(a) Unter welcher zusätzlichen Annahme an f ist S eine reguläre Fläche?

(b) Sei nun f so gewählt, dass S eine reguläre Fläche ist.

 (i) Berechnen Sie die Tangentialebene von S in $p_0 \in S$, p_0 beliebig. Welche Relation gibt es zwischen den Tangentialebenen an die Punkte $p_0, p_1 \in S$, falls $p_0^1 = p_1^1$ gilt, d.h. bezüglich Punkten mit derselben ersten Koordinate?

 (ii) Berechnen Sie die erste Fundamentalform von S in den lokalen Koordinaten

$$(x, \varphi) \mapsto (x, f(x) \cos \varphi, f(x) \sin \varphi)^t.$$

(c) Betrachten Sie nun $f(x) = \frac{1}{b} \cosh(bx)$ mit $b > 0$ für $x \in (0, 1)$. Skizzieren Sie S in diesem Fall. Berechnen Sie den Flächeninhalt von S.

Hinweis: Für die Definition des Flächeninhalts einer regulären Fläche schaue man in ein Analysis 2- oder Maßtheoriebuch.

3. Aufgabe
Es sei S das Bild der Abbildung $F : \mathbb{R} \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(t, s) := ((1 + s\cos(t))\cos(2t), (1 + s\cos(t))\sin(2t), s\sin(t))^t\,.$$

(a) Es bezeichne $\tilde{F} : (0, \pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ die Restriktion von F auf $(0, \pi) \times (-1, 1)$. Man zeige, dass $\tilde{F}$ injektiv ist.

(b) Sei $S' := \tilde{F}((0, \pi) \times (-1, 1))$. Bestimmen Sie $S \setminus S'$.

(c) **[etwas aufwändiger]** Man zeige, dass S eine reguläre Fläche ist.

(d) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t, s) \mapsto s$ die Projektion auf die s-Koordinate. Man zeige, dass sich $f \circ \tilde{F}^{-1} : S' \to \mathbb{R}$ nicht als stetige Funktion auf S fortsetzen lässt.

4. Aufgabe
Geben Sie lokale Parametrisierungen der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ an, so dass die erste Fundamentalform der $\mathbb{S}^2$ in diesen Koordinaten die Form

$$g_{12} = g_{21} = 0 \text{ und } g_{11} = g_{22}$$

hat.

Ihre Lösungen der mit einem Stern versehenen Aufgabe geben Sie bitte am Donnerstag, den 27.06.2013 in der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung am Mittwoch, den 26.06.2013 vor.