Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Frédéric Stoffers
frederic.stoffers@uni-ulm.de

Elemente der Funktionalanalysis – Übungsblatt 2

Abgabe: bis Freitag, 08.05.2015 vor der Übung

1. Es sei $p \in [1, \infty)$. Beweisen Sie, dass der normierte Raum l^p vollständig ist. [4]

2. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge, $k \in \mathbb{N}_0$ und $C^k(G, \mathbb{R})$ der Raum der auf G definierten, nach $\mathbb{R}$ abbildenden Funktionen u, die bis zur Ordnung k stetige partielle Ableitungen besitzen. Beweisen Sie, dass der normierte Raum

$$C^k(\overline{G}) := \{u \in C^k(G, \mathbb{R}) \,|\, ||u||_{C^k(\overline{G})} < \infty\}$$

mit der Norm

$$||u||_{C^k(\overline{G})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in G} |D^\alpha u(x)|$$

vollständig, d.h. ein Banachraum ist. Dabei bezeichnet D^α den partiellen Differentiationsoperator zum Multiindex $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und es ist $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$. [6]

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst für den Spezialfall $k = 0$, d.h. für den Raum der stetigen, auf G beschränkten Funktionen mit der Supremumsnorm.

3. Beweisen Sie "zu Fuß", dass die Menge der dyadischen Zahlen der Form $\alpha = \frac{l}{2^k}$, $l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$, dicht in $\mathbb{R}$ liegt. [3]

4. Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \neq 1$. Für eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ definiere $\mathbb{Z}_m := \{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \geq m\}$. Beweisen Sie:

   (a) Für jedes $\epsilon \in \{-1, 1\}$ und jede Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_m}$ in $\mathbb{N}_0$ mit $0 \leq a_k < q$ für alle $k \in \mathbb{Z}_m$ konvergiert die Reihe [2]

$$\epsilon \sum_{k=m}^{\infty} a_k q^{-k}.$$

   (b) Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ kann als Grenzwert einer Reihe wie in (a) dargestellt werden. [4]

   (c) Geben Sie mit Hilfe von (b) einen weiteren Beweis dafür, dass die Menge der dyadischen Zahlen der Form $\alpha = \frac{l}{2^k}$, $l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$, dicht in $\mathbb{R}$ liegt. [3]

5. Beweisen Sie: Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Für Cauchy–Folgen x_k, y_k in M definieren wir eine Relation $\sim$ mit

$$x_k \sim y_k :\Leftrightarrow (d(x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge.}$$

Weisen Sie nach, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Cauchy–Folgen in (M, d) ist. [3]