ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Frédéric Stoffers
frederic.stoffers@uni-ulm.de

Elemente der Funktionalanalysis – Übungsblatt 4
Abgabe: bis Freitag, 05.06.2015 vor der Übung

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir den Sobolevraum

$$W^k(G) = W^{k,2}(G) = \{u \in L^2(G) \,|\, \forall |\alpha| \leq k \, \exists D^\alpha u \in L^2(G) : (*) \text{ gilt}\},$$

wobei

$$(*) \quad (D^\alpha u, v) = (-1)^{|\alpha|}(u, D^\alpha v) \; \forall v \in C_c^\infty(G).$$

1. Es sei $G = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$.

   (a) Beweisen Sie, dass die Funktion

   $$u(x) := \begin{cases} -x+2 & \text{für } -2 < x \leq 0 \\ 2 & \text{für } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

   in $W^1(G)$ liegt mit schwacher Ableitung [3]

   $$D^1 u(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } -2 < x \leq 0 \\ 0 & \text{für } 0 < x < 2. \end{cases}$$

   (b) Beweisen Sie, dass die Funktion [4]

   $$u(x) := \begin{cases} -x+2 & \text{für } -2 < x \leq 0 \\ 3 & \text{für } 0 < x < 2 \end{cases}$$

   nicht in $W^1(G)$ liegt.

   Hinweis zu (b): Man kann mit Hilfe der C^∞-Funktion

   $$\phi(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{für } |x-1| < 1 \\ 0 & \text{für } |x-1| \geq 1 \end{cases}$$

   eine Folge $(\phi_n) \in C_c^\infty(G)$ konstruieren mit

   $$0 \leq \phi_n \leq e^{-1}, \; \phi_n(0) = e^{-1}, \; \phi_n(x) \to 0 \text{ für alle } x \neq 0.$$

2. (a) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ mit dem L^2-Skalarprodukt

   $$(f, g) := \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$$

   bildet. [3]

   Hinweis: Es ist nicht zu zeigen, dass das System in ein vollständiges ist. Dieses ist zwar richtig, ist aber etwas schwieriger zu beweisen.

(b) Sie können ohne Beweis voraussetzen, dass $\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \frac{\cos\frac{1}{2}kt}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin\frac{1}{2}kt}{\sqrt{2\pi}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis in $C^0([-2\pi, 2\pi], \mathbb{R})$ bildet. Zeigen Sie, dass die Entwicklungen von (i) geraden Funktionen ($f(x) = f(-x)$) und (ii) ungeraden Funktionen ($f(x) = -f(-x)$) in dieser Basis eine einfachere Gestalt als in der allgemeinen Situation besitzen. [3]

(c) Sei $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$. Dann definieren wir die *ungerade Fortsetzung* $\tilde{f}$ von f auf das Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ durch

$$\tilde{f}(x) := f(x),\ x \in [0, 2\pi],\ \ \tilde{f}(x) := -f(x),\ x \in [-2\pi, 0).$$

Beweisen Sie mit Hilfe von (b), dass f die Hilbert-Raum-Entwicklung

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{1}{2}kx\right),\ \ x \in [0, 2\pi]$$

mit

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{1}{2}kt\right) f(t)\,dt$$

besitzt. [3]

3. Zu einer Konstante $c > 0$ und Funktionen $f \in C^4([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $g \in C^3([0, 2\pi], \mathbb{R})$ werde das folgende Differentialgleichungsproblem betrachtet, welches der physikalischen Situation einer schwingenden, an den Endpunkten fest eingespannten Saite entspricht, für welche eine Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit vorgegeben ist.

$$\begin{aligned}
(*) \quad & c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0,\ \ 0 < x < 2\pi,\ \ t > 0 \\
(N1) \quad & u(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ \ 0 \le x \le 2\pi, \\
(N2) \quad & u(0,t) = u(2\pi,t) = 0,\ \ t \ge 0.
\end{aligned}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Lösung des Problems $(*)$,(N1),(N2) mit Hilfe der Fourier-Entwicklung zu finden. Dazu gehe man wie folgt vor.

(a) Zunächst nur $(*)$ berücksichtigend, mache man einen Ansatz der Variablentrennung

$$u(x,t) = X(x)T(t),\ \ (x,t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+$$

für die Lösungsfunktion. Zeigen Sie, dass die Funktionen X und T den (gewöhnlichen) Differentialgleichungen

$$X''(x) - KX(x) = 0,\ \ T''(x) - c^2KT(t) = 0$$

mit einer gewissen Konstante $K \in \mathbb{R}$ genügen müssen. [3]

(b) Wir sind zunächst nur an nichttrivialen Lösungen u interessiert, die nicht gleich der Nullfunktion sind. Begründen Sie unter Berücksichtigung von (N2), dass dann $X(0) = 0 = X(2\pi)$ gilt und bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Problems

$$\left\{\begin{array}{l} X''(x) - KX(x) = 0,\ \ 0 < x < 2\pi, \\ \qquad X(0) = 0 = X(2\pi), \end{array}\right.$$

insbesondere sind dabei die möglichen Werte für die Konstante K (*Hinweis:* $K = K_n = -\lambda_n^2$ mit $\lambda_n = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$) zu ermitteln, die sich für Lösungsfunktionen $X = X_n$ ergeben, die nicht gleich der Nullfunktion sind.
Bestimmen Sie anschließend die allgemeine Lösung $T = T_n$ der Differentialgleichung

$$T''(x) - c^2KT(t) = 0$$

und damit dann die allgemeine Lösung $u = u_n$. [3]

(c) Lassen Sie nun allgemeine abzählbare (formale) Summen $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, von Lösungen aus (b) zu. Finden Sie die passenden Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$, so dass nun auch die Bedingungen (N1) erfüllt werden. Begründen Sie zudem, dass die Differentialgleichung $(*)$ nun auch im Fall der unendlichen Summe weiterhin erfüllt bleibt. [3]

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die entsprechenden Reihen (sofern richtig gewählt) nicht nur im L^2-Sinne, sondern auch im $||.||_\infty$-Sinne, d.h. gleichmäßig, konvergieren.