ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Frédéric Stoffers
frederic.stoffers@uni-ulm.de

Elemente der Funktionalanalysis – Übungsblatt 5
Abgabe: bis Freitag, 19.06.2015 vor der Übung

1. Beweisen Sie: Jeder Prä–Hilbert–Raum X ist gleichmäßig konvex , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X, ||x|| \le 1, ||y|| \le 1, ||x - y|| \ge \varepsilon : \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \le 1 - \delta.$$

[3]

2. Zeigen Sie, dass der Approximationssatz 1.5.1 in jedem gleichmäßig konvexen Banachraum gilt. [6]

   Hinweis für die Existenzaussage: Sie können folgendermaßen vorgehen: Überlegen Sie sich zunächst, weshalb man o.B.d.A. $x = 0$ und $\inf\limits_{y \in K} ||x - y|| = 1$ annehmen kann. Betrachten Sie dann zu einer Minimalfolge $(x_k) \in K$ die normierte Folge $a_k := \frac{x_k}{||x_k||}$, $k \in \mathbb{N}$, und beweisen Sie

$$\left\| \frac{1}{2}(a_k + a_l) \right\| \ge z_{kl} \to 1, \quad \text{für } k, l \to \infty$$

   mit einer gewissen doppelt-indizierten Zahlenfolge (z_{kl}). Folgern Sie nun mit Hilfe der gleichmäßigen Konvexität von K, dass $(x_k) \in K$ eine Cauchyfolge ist.

3. Seien $L : H \to \mathbb{C}$ ein beschränktes lineares Funktional auf einem Hilbert–Raum H mit dem Kern $N := \{x \in H \,|\, Lx = 0\} \ne H$. Beweisen Sie (z.B. mit Hilfe des Projektionssatzes), dass $\dim N^{\perp} = 1$ gilt. [4]

4. Es sei X ein normierter Raum und $P : X \to X$ eine lineare Projektion, d.h. $P \circ P = P$, die zudem stetig ist. Beweisen Sie:

   (a) Es ist $P = 0$ oder $||P|| \ge 1$, wobei $||P||$ die Operatornorm von P bezeichne. [1]

   (b) Kern P und Im P sind abgeschlossen. [2]

   (c) Es gilt $X = \text{Kern}\, P \oplus \text{Im}\, P$ und eine Folge $X \ni x_n = a_n + b_n$ mit $a_n \in \text{Kern}\, P$ und $b_n \in \text{Im}\, P$ konvergiert genau dann in X, wenn an und b_n in ihren jeweiligen Teilräumen konvergieren. [4]

   Bemerkung: Im Falle der Gültigkeit von Aussage (c) sagt man auch, dass $X = \text{Kern}\, P \oplus \text{Im}\, P$ *im topologischen Sinne* gilt.

Bitte wenden.

5. Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $D := C^0([a,b])$ der Raum der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen, ausgestattet mit der L^2-Norm, $K \in C^0([a,b] \times [a,b])$ und der Integraloperator $T : D \to L^2([a,b])$ definiert durch

$$(Tu)(x) := \int_a^b K(x,y)u(y)\,dy, \;\; u \in D, x \in [a,b].$$

Zeigen Sie, dass T einen stetigen linearen Operator definiert und dass

$$||T|| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2\,dxdy}$$

gilt. [4]