ulm university universität **uulm**

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Frédéric Stoffers
frederic.stoffers@uni-ulm.de

Elemente der Funktionalanalysis – Übungsblatt 6

Abgabe: bis Freitag, 03.07.2015 vor der Übung

Es sei H ein Hilbert–Raum. Mit $L(H)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten linearen Operatoren von H in sich.

1. Zeigen Sie, dass in einem komplexen Hilbert–Raum H ein Operator $T \in L(H)$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$ gilt. [4]

   Hinweis: Für die schwierigere Richtung kann man folgendermaßen vorgehen: Zunächst zeige man $(Tx, x) = (x, Tx)$ für alle $x \in H$ und anschließend verwende man ein Analogon zur komplexen Polarisationsidentität im Prä–Hilbert–Raum.

2. Sei $X = C^2([0, \pi], \mathbb{R})$ und $(u, v) := \int_0^\pi u(t)v(t)dt$ für $u, v \in X$. Weiter sei H die Vervollständigung von X bezüglich der induzierten Norm, $D := C_0^2((0, \pi), \mathbb{R})$ und $T : D \to H$ mit $Tu := -u'' + u$.

   (a) Man zeige: $(Tu, v) = (u, Tv)\ \forall u, v \in D$ und $||u|| \leq ||Tu||\ \forall u \in D$. [3]

   (b) Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $v \in X \setminus \{0\}$ mit $v \perp R(T)$ an und folgere daraus, dass $R(T)$ nicht dicht in H liegt. [3]

3. Seien M, N abgeschlossene Teilräume eines Hilbert–Raumes H und P_M, P_N seien die Projektionsoperatoren auf M bzw. N. Man zeige, dass $P = P_M P_N$ genau dann eine orthogonale Projektion ist, wenn $P_M P_N = P_N P_M$ gilt. In diesem Fall ist $P = P_{M\cap N}$. Ferner gilt $M \perp N \Leftrightarrow P_M P_N = 0$. [5]

4. Es sei H ein Hilbert–Raum über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen (Satz von Hahn-Banach im Hilbert–Raum):

   (a) Es sei U ein linearer Teilraum von H und $l : U \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional auf U. Dann existiert eine normerhaltende lineare Fortsetzung $L : H \to \mathbb{K}$ von l, d.h. L ist stetig und linear, $L(x) = l(x)$ für alle $x \in U$ und $||L|| = ||l||$. [4]

   Hinweis: Man denke an den Projektionssatz.

   (b) Sei H als reeller Hilbert–Raum vorausgesetzt. Außerdem seien eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge K von H und eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge A von H mit $K \cap A = \emptyset$ gegeben. Dann existieren ein stetiges lineares Funktional $L \in H'$ und relle Zahlen $c_1 < c_2$, so dass [6]

   $$L(x) \leq c_1 < c_2 \leq L(y)\ \forall x \in K\ \forall y \in A.$$

   Hinweis: Man kann folgendermaßen vorgehen. Man zeige unter Verwendung eines Satzes der Vorlesung, dass $x_0 \in K, y_0 \in A$ existieren mit

   $$||x_0 - y_0|| = \operatorname{dist}(K, A) := \inf_{x \in K, y \in A} ||x - y||.$$

   Mit Hilfe von $\xi := \dfrac{y_0 - x_0}{||x_0 - y_0||}$ lässt sich nun ein lineares Funktional mit $L(x) \leq L(x_0)$ und $L(y_0) \leq L(y)$ für alle $x \in K, y \in A$ konstruieren.