Serie 4

1. Aufgabe (3+3=6 Punkte)
Gegeben seien zwei reelle Zahlenfolgen durch

- $a_n := 5 + \frac{10}{2^n}, n \in \mathbb{N}$
- $b_n := \frac{1}{n^2 - \frac{15}{2}n}, n \in \mathbb{N}$

Bestimmen Sie die Grenzwerte a bzw. b der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Geben Sie jeweils zu gegebenem $\epsilon > 0$ $n_0 \in \mathbb{N}$ und $m_0 \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $|b_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq m_0$.

Lösung. Betrachte zunächst die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (5 + \frac{10}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es wird behauptet, dass die Folge zum Grenzwert $a = 5$ konvergiert. Es gilt

$$|a_n - a| = |5 + \frac{10}{2^n} - 5| = |\frac{10}{2^n}| = \frac{10}{2^n}$$

Setze $n_0 := \lceil \log_2(\frac{10}{\epsilon}) \rceil$ ($\lceil \log_2(\frac{10}{\epsilon}) \rceil$ ist die kleinste natürliche Zahl, die größer als $\log_2(\frac{10}{\epsilon})$ ist). Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - a| = \frac{10}{2^n} \leq \frac{10}{2^{n_0}} \leq \frac{10}{2^{\log_2(\frac{10}{\epsilon})}} = \frac{10}{\frac{10}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Bemerkung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0 + 1$ gilt dann wegen der strengen Monotonie von $\frac{10}{2^n}$ die Beziehung $|a_n - a| < \epsilon$.

Betrachte nun die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n^2 - \frac{15}{2}n})_{n\in\mathbb{N}}$ (Zu bedenken ist, dass $n^2 - \frac{15}{2}n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt). Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es wird behauptet, dass die Folge zum Grenzwert $b = 0$ konvergiert. Es gilt

$$|b_n - b| = |\frac{1}{n^2 - \frac{15}{2}n}|$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $p(n) := n^2 - \frac{15}{2}n - \frac{1}{\epsilon}$ sind nach dem Satz von Vieta bzw. der p-q-Formel

$$x = \frac{15}{4} + \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{1}{\epsilon}}$$
$$y = \frac{15}{4} - \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{1}{\epsilon}}$$

Setze $m_0 := \lceil x \rceil$. Es wird nun gezeigt, dass m_0 das Gewünschte erfüllt. Sei also $n \geq m_0$. Da insbesondere $n \geq x$ gilt, x Nullstelle von p ist und p für Werte rechts von der größeren Nullstelle monoton steigt, folgt automatisch $\frac{1}{n^2 - \frac{15}{2}n} > 0$. Weiter ist für $n \geq m_0$

$$\begin{aligned}
&|\frac{1}{n^2 - \frac{15}{2}n}| &< \epsilon \\
\iff &\frac{1}{n^2 - \frac{15}{2}n} &< \epsilon \\
\iff &n^2 - \frac{15}{2}n &> \tfrac{1}{\epsilon} \\
\iff &n^2 - \frac{15}{2}n - \frac{1}{\epsilon} &> 0
\end{aligned}$$

Da die Bedingung $n^2 - \frac{15}{2}n - \frac{1}{\epsilon} > 0$ für alle $n \geq m_0$ erfüllt ist, gilt somit $|b_n| < \epsilon$ für alle $n \geq m_0$. □

2. Aufgabe (2+2+2=6 Punkte)
Bestimmen Sie unter Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte die Grenzwerte der folgenden reellen Zahlenfolgen definiert durch

(a) $a_n := (\frac{3n}{2n!} - 4)(|3(-1)^n - (-1)^{n+1}|), n \in \mathbb{N}$

(b) $b_n := \frac{2n^2+3}{4n^2+5n}, n \in \mathbb{N}$

(c) $c_n := \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{\frac{1}{2}n^4}, n \in \mathbb{N}$.

Lösung. (a) Die Folge a_n lässt sich schreiben als Produkt der Folgen $x_n := (\frac{3n}{2n!} - 4)$ und $y_n := (|3(-1)^n - (-1)^{n+1}|)$. Eine Fallunterscheidung, in welcher zwischen geradem und ungeradem $n \in \mathbb{N}$ unterschieden wird, liefert $y_n = 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit y_n gegen die Zahl 4 konvergiert, Zudem konvergiert die Folge $\frac{3n}{2n!}$ gegen 0, da $\frac{3n}{2n!} = \frac{3}{2(n-1)!}$ ist und der Nenner für n gegen ∞ gegen ∞ strebt. Damit konvergiert die Folge x_n und es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = (\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n!}) - 4 = -4$. Da x_n und y_n konvergieren, gilt dann, dass a_n konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n) = -16$$

gilt.

(b) Es gilt

$$b_n = \frac{2n^2+3}{4n^2+5n} = \frac{2+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{5}{n}}$$

Hierbei gilt $\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{3}{n^2} = 2$ und $\lim_{n\to\infty} 4 + \frac{5}{n} = 4$. Unter Anwendung der Rechenregeln für Limites folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{3}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(4+\frac{5}{n})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(c) Nach einer Übungsaufgabe von Serie 1 gilt

$$c_n = \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{\frac{1}{2}n^4} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{1}{2}n^4} = \frac{\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n}{\frac{1}{2}n^4} = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2}}{n}$$

Der Zähler des letzten Ausdrucks konvergiert gegen $\frac{2}{3}$, während der Nenner für n gegen ∞ gegen ∞ strebt. Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. $\square$

3. Aufgabe (3+3=6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $|x^2 - 4x| > 2$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $y \in \mathbb{R}$, für die $10 < |5y - 2| \leq 100$ gilt.

Lösung. (a) Die Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^2 - 4x = x(x-4)$ sind $r = 0$ und $s = 4$. Da der Leitkoeffizient von p positiv ist, ist die Parabel nach oben geöffnet und p nimmt seine negativen Werte ausschließlich im offenen Intervall $(0,4)$ an. Wir untersuchen zunächst, in welcher Teilmenge von $\mathbb{R} \setminus (0,4)$ $|x^2 - 4x| > 2$ gilt. Dazu setzen wir $x^2 - 4x = 2$, woraus $x^2 - 4x - 2 = 0$ folgt. Mit der p-q-Formel erhält man, dass diese quadratische Gleichung für die Werte

$$t = 2 + \sqrt{6}$$
$$u = 2 - \sqrt{6}$$

erfüllt ist, woraus folgt $x^2 - 4x > 2$ für alle $x \leq 2 - \sqrt{6}$ und alle $x \geq 2 + \sqrt{6}$, also auch $|x^2 - 4x| > 2$ für alle $x \leq 2 - \sqrt{6}$ und alle $x \geq 2 + \sqrt{6}$. Nun untersuchen wir, in welcher Teilmenge von $(0,4)$ $|x^2 - 4x| > 2$ gilt. Dazu setzen wir $x^2 - 4x = -2$, woraus $x^2 - 4x + 2 = 0$ folgt. Mit der p-q-Formel erhält man, dass diese quadratische Gleichung für die Werte

$$t = 2 + \sqrt{2}$$
$$u = 2 - \sqrt{2}$$

erfüllt ist, woraus folgt $x^2 - 4x < -2$ für alle $x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, also $|x^2 - 4x| > 2$ für alle $x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$. Insgesamt haben wir erhalten

$$\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 4x| > 2\} = (-\infty, 2 - \sqrt{6}) \cup (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{6}, \infty).$$

(b) Für alle $y \in \mathbb{R}$, die $10 < |5y-2| \leq 100$ erfüllen, muss gelten

$$10 < |5y-2| \text{ und } |5y-2| \leq 100$$

d.h.

$$(10 < 5y-2 \text{ oder } 5y-2 < -10) \text{ und } (5y-2 \leq 100 \text{ und } 5y-2 \geq -100)$$

also

$$(y > \frac{12}{5} \text{ oder } y < -\frac{8}{5}) \text{ und } (y \leq \frac{102}{5} \text{ und } y \geq -\frac{98}{5})$$

Damit gilt

$$\{y \in \mathbb{R} : 10 < |5y-2| \leq 100\} = [-\frac{98}{5}, -\frac{8}{5}) \cup (\frac{12}{5}, \frac{102}{5}]. \quad \square$$

4. Aufgabe (3+2+1=6 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die reelle Zahlenfolge, welche den Startwert $a_1 = 100$ besitzt und der Rekursionsbeziehung $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genügt.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge beschränkt mit Werten im Intervall $(4, 100]$ (also dass, für alle $n \in \mathbb{N}$ $4 < a_n \leq 100$ gilt) und monoton fallend ist und somit nach einem Satz aus der Vorlesung konvergiert.

(b) Bestimmen Sie eine explizite Formel für das n-te Folgenglied a_n, welche a_n als Funktion des Index n darstellt (wie z.B. $a_n = 7n^2 - 2$).

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung. (a) Zunächst wird per Induktion gezeigt, dass $a_n > 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Induktionsanfang $a_1 = 100 > 4$, womit die Aussage für $n = 1$ gilt.
Induktionsschluss Es gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}$, d.h. es sei $a_n > 4$. Es ist dann

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2 > \frac{1}{2} * 4 + 2 = 4,$$

womit die Aussage auch für $n+1$ gilt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt also $a_n > 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Nun zeigen wir, dass die Folge monoton fallend ist. Sei also $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}a_n + 2 - a_n = -\frac{1}{2}a_n + 2 < -\frac{1}{2} * 4 + 2 = 0,$$

wobei benutzt wurde, dass $a_n > 4$ gilt. Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, womit dann ebenfalls die Beschränktheit der Folge mit Werten im Intervall $(4, 100]$ folgt (Eine monoton fallende Folge ist von oben durch ihr erstes Folgenglied beschränkt). Nach einem Satz aus der Vorlesung sind monotone, beschränkte Folgen konvergent.
(b) Es lässt sich Beispiel (4.3) aus der Vorlesung mit den Werten $a_1 = 100, q = \frac{1}{2}, c = 2$ (a_1 anstelle B_0) anwenden. Es ergibt sich dann (beachte, dass $n = 1$ anstelle $n = 0$ der erste Index ist und sich somit die Exponenten, in denen n steht, um 1 verschieben).

$$a_n = a_1 q^{n-1} + c\frac{1-q^{n-1}}{1-q} = 100 * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4 * \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right). \tag{1}$$

(c) Wir stellen fest, dass in der Formel (1) die beiden Summanden im letzten Ausdruck konvergieren, so dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{n\to\infty} 100 * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + \left(\lim_{n\to\infty} 4 * \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\right) = 0 + 4 * 1 = 4$$

Bemerkung: *Der Grenzwert lässt sich ebenfalls aus der Rekursionsbeziehung*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2 \tag{2}$$

herleiten. Die Teilfolge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert zum selben Limes, den wir a nennen, wie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Anwenden des Limes auf beiden Seiten (wir wissen, dass die Limites existieren!) von (2) ergibt

$$\begin{aligned} & a = \tfrac{1}{2}a + 2 \\ \iff \quad & \tfrac{1}{2}a = 2 \\ \iff \quad & a = 4 \quad \square \end{aligned}$$

5. Aufgabe (3+3=6 Punkte)
Der monatliche Bestand einer Kaninchenpopulation genüge den folgenden Regeln:

- Im ersten Monat existiert genau ein Kaninchenpaar.
- Jedes Paar Kaninchen wirft pro Monat genau ein weiteres Paar Kaninchen.
- Ein neugeborenes Paar bekommt erst im zweiten Lebensmonat Nachwuchs.
- Die Tiere befinden sich in einem abgeschlossenen Raum, so dass kein Tier die Population verlassen (insbesondere keines stirbt) und keines von außen hinzu kommen kann.

(a) Begründen Sie, dass man den monatlichen Bestand $f_n, n \in \mathbb{N}$, (die Anzahl der Paare, die in diesem Monat leben) durch die rekursive Beziehung $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, modellieren kann, wenn man $f_0 = 0$ setzt. Geben Sie zusätzlich $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$ an.

(b) Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion kann so modifiziert werden, dass man im Induktionsschluss annehmen darf, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen kleiner als $n+1$ anstatt nur für n gelte.

Lösung. (a) Der Kaninchenbestand zum Zeitpunkt $n+1$ ergibt sich als Summe des Kaninchenbestandes des Vormonats, also des Bestandes zum Zeitpunkt n, und der Anzahl der Neugeborenen, die gleich der Anzahl der Kaninchenpaare ist, die bereits zum Zeitpunkt $n-1$ gelebt haben (so wird berücksichtigt, dass die zum Zeitpunkt n Geborenen keinen Nachwuchs für den Monat $n+1$ bereitstellen). Es ergibt sich somit $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ (mit der Setzung $f_0 = 0$ (so dass das Kaninchenpaar zum Zeitpunkt $n = 1$ als neugeborenes anzusehen ist) ist die Formel auch für $n = 1$ korrekt).
Anwenden der Rekursionsformel ergibt $f_2 = f_1 + f_0 = 1$,$f_3 = f_2 + f_1 = 2$,
$f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, f_8 = 21$.
(b) Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion.
Induktionsanfang Es sei $n = 1$. Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^1 - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^1\Big) = \frac{2}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) = 1 = f_1,$$

womit die Aussage für $n = 1$ erfüllt ist.
Induktionsschritt Es gelte die Aussage für alle natürlichen Zahlen kleiner als $n+1$, wobei $n \in \mathbb{N}$ sei. Dann ist

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big) + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1} - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n + \big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1} - \Big(\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n + \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1}\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\big) - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1}\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\big)\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{n+1} - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{n+1}\Big), \end{aligned} \tag{3}$$

wobei wir die letzte Gleichheit, d.h. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$ und $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1$ noch nachweisen müssen. Es gilt

$$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1}{4}\Big(1 + 2\sqrt{5} + 5\Big) = \frac{1}{2}\Big(3 + \sqrt{5}\Big) = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

und

$$(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1}{4}\Big(1 - 2\sqrt{5} + 5\Big) = \frac{1}{2}\Big(3 - \sqrt{5}\Big) = \frac{1-\sqrt{5}+2}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1,$$

womit die Gleichung in (3) gezeigt ist. Damit gilt die Aussage für $n+1$ und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\Big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. $\square$