

(c) Sei E eine Eigenschaft. Setze

$$A := \{x \in X \mid E \text{ gilt in } x\}$$

" $\Rightarrow$ ": Es gelte E μ -f.ü. Dann ex. $A' \in \mathcal{A}$ mit $A' \subset A$, so daß

$$X \setminus A' \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(X \setminus A') = 0.$$

Dann folgt wg. $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}$:

$$A' \in \hat{\mathcal{A}}, X \setminus A' \in \hat{\mathcal{A}} \text{ und wg. } \hat{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$$

undem $\hat{\mu}(X \setminus A') = 0$, d.h. E gilt $\hat{\mu}$ -f.ü.

" $\Leftarrow$ ": Es gelte E $\hat{\mu}$ -f.ü. Dann ex. $A' \subset A$, $A' \in \hat{\mathcal{A}}$,
so daß $X \setminus A' \in \hat{\mathcal{A}}$ und $\hat{\mu}(X \setminus A') = 0$ (*)

$$A' \in \hat{\mathcal{A}} \Rightarrow \exists A_0 \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N} \text{ mit } A' = A_0 \cup N.$$

Zeige: $\mu(X \setminus A_0) = 0$.

$$\text{Es gilt } \mu(X \setminus A_0) = \hat{\mu}(X \setminus A_0) \stackrel{(**)}{=} \hat{\mu}(X \setminus A') \stackrel{(*)}{=} 0$$

Zu (**): Wir haben

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(X \setminus A_0) &= \hat{\mu}((X \setminus A') \cup (A' \setminus A_0)) \\ &= \hat{\mu}(X \setminus A') + \underbrace{\hat{\mu}(A' \setminus A_0)}_{\substack{\subset N \\ \leq \hat{\mu}(N) = 0}} = \hat{\mu}(X \setminus A'). \end{aligned}$$

Da $X \setminus A_0 \in \mathcal{A}$ und $\mu(X \setminus A) = 0$ gilt, ist gezeigt,
dass E μ -f.ü. gilt. □

Aufgabe 2(a) für $\hat{\mathcal{A}}$ -meßbares $f: X \rightarrow [0, +\infty]$

definiere $\int f d\mu := \int f d\hat{\mu}$.

Sei $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ $\mathcal{A}$ -meßbar.

Sei $\hat{\mathcal{S}}$ die Menge der $\hat{\mathcal{A}}$ -meßbaren einfachen Fkt.,
 $\mathcal{S}$ " " " $\mathcal{A}$ -meßbaren " " " ,

womit also insbes. $\hat{\mathcal{S}} \supset \mathcal{S}$ gilt, da $\hat{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$.

Sei $\int^{\text{ur}} f d\mu$ die ursprüngliche Def. des Integrals für f .

Dann gilt

$$\int^{\text{ur}} f d\mu = \sup_{\substack{f \in \mathcal{S} \\ 0 \leq \varphi \leq f}} \int \varphi d\mu \stackrel{(*)}{=} \sup_{\substack{f \in \hat{\mathcal{S}} \\ 0 \leq \varphi \leq f}} \int \varphi d\hat{\mu} = \int f d\hat{\mu}$$

Zu (*): Dieses gilt, da für $f := \sum_{k=1}^N a_k \chi_{A_k}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $A_k \in \mathcal{A}$
 $\forall k=1, \dots, N$
 $\int f d\mu = \sum_{k=1}^N a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^N a_k \hat{\mu}(A_k) = \int f d\hat{\mu}$

gilt und $\hat{\mathcal{S}} \supset \mathcal{S}$ ist.

Es verbleibt, $\int f d\hat{\mu} \leq \int^{\text{ur}} f d\mu$ zu zeigen.

Dann genügt es aber, zu jedem $\hat{f} := \sum_{k=1}^N a_k \chi_{\hat{A}_k}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $\hat{A}_k \in \hat{\mathcal{A}}$,
ein $f \in \mathcal{S}$ zu finden mit $\int f d\mu = \int \hat{f} d\hat{\mu}$.

Aufgrund der Def. von $\hat{\mathcal{A}}$ existiert für alle $k=1, \dots, N$ ein
 $A_k \in \mathcal{A}$ und ein $N_k \in \mathcal{N}$ mit $\hat{A}_k = A_k \cup N_k$.

Außerdem ist dann $\hat{\mu}(\hat{A}_k) = \mu(A_k)$, siehe Aufg. 1.

-8-

Setze $f := \sum_{k=1}^N a_k \chi_{A_k} \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^N a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^N a_k \hat{\mu}(\tilde{A}_k) = \int \hat{f} d\hat{\mu}.$$

Vg. $A_k \subset \tilde{A}_k \quad \forall k=1, \dots, N$ folgt $f \leq \hat{f}$ und damit
 $0 \leq \hat{f} \leq f \Rightarrow 0 \leq \int \hat{f} d\hat{\mu} \leq \int f d\mu$

Also folgt

$$\int f d\hat{\mu} = \sup_{\substack{0 \leq \tilde{f} \leq f \\ \tilde{f} \in \mathcal{F}}} \int \tilde{f} d\hat{\mu} \leq \sup_{\substack{0 \leq \tilde{f} \leq f \\ \tilde{f} \in \mathcal{F}}} \int \tilde{f} d\mu = \int f d\mu.$$

$$\Rightarrow \int f d\hat{\mu} = \int f d\mu \quad \text{für } \mathcal{A}\text{-meßbares } f: X \rightarrow [0, +\infty]$$

und damit auch

$$\int f d\hat{\mu} = \int f d\mu \quad \text{für allgemeines } \mathcal{A}\text{-meßb. } f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

nach der üblichen Definition des Integrals über f^+ und f^- .

Insgesamt ist die Konsistenz der "neuen" Definition des Integrals mit der ursprünglichen bewiesen.

(b) Sei $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ $\mathcal{A}$ -meßbar.

Nach Satz 4.2.6 existiert $\tilde{f}: X \rightarrow [0, +\infty]$ $\mathcal{A}$ -meßbar

mit $f = \tilde{f}$ f.ü. [siehe Aufg. 1.(c)]

Wir definieren daher

$$\int_{\text{neu}} f d\mu := \int \tilde{f} d\mu.$$

Es gilt dann

$$\int_{\text{neu}} f d\mu = \int \tilde{f} d\mu \stackrel{(a)}{=} \int \tilde{f} d\hat{\mu} \stackrel{\text{da } f=\tilde{f} \text{ f.ü.}}{=} \int f d\hat{\mu} = \int f d\mu$$

$$\Rightarrow \int_{\text{neu}} f d\mu = \int f d\mu.$$

Also ist die Def. in (b) äquivalent zu der in (a).

□