2. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra auf X.

Beh. $\mathcal{A}^* := \{ A^* \in \mathcal{P}(X^*) \mid f^{-1}(A^*) \in \mathcal{A} \}$ ist σ-Algebra auf X^*.

Bew. (i) Da $\mathcal{A}$ σ-Algebra ist, gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$ und somit wegen $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$ die Beziehung $\emptyset \in \mathcal{A}^*$, d.h. $\mathcal{A}^* \neq \emptyset$.

(ii) Seien $A_1^*, A_2^*, \dots \in \mathcal{A}^*$. Dann existieren $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ mit $f^{-1}(A_k^*) = A_k$ f.a. $k \in \mathbb{N}$.
Also ist

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^*\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A_k^*) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A},$$

d.h. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^* \in \mathcal{A}^*$.

(iii) Sei $A^* \in \mathcal{A}^*$. Es ex. $A \in \mathcal{A}$ mit $f^{-1}(A^*) = A$. Weiter

$$f^{-1}(\complement A^*) = \complement f^{-1}(A^*) = \complement A \in \mathcal{A},$$

d.h. $\complement A^* \in \mathcal{A}^*$.