Aufg. 4)

1) z.z.: $\bar{\mathcal{E}}$ ist eine Algebra

(i) $\bar{\mathcal{E}}$ ist natürlich nichtleer, da z.B. $\bigtimes_{j=1}^{n} [0,1] \in \bar{\mathcal{E}}$ (n-faches kartesisches Produkt)

(ii) Sei $A = \bigcup_{j=1}^{k} J_j \in \bar{\mathcal{E}}$ eine Darstellung durch disjunkte $J_j \in \bar{\mathcal{J}}$

(1) Es gilt $\mathcal{C}A = \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{C} J_j$

Zeige nun: $\forall J \in \bar{\mathcal{J}} : \mathcal{C}J \in \bar{\mathcal{E}}$ (*)

Sei also $J := \bigtimes_{j=1}^{n} J_{a_j, b_j}$, wobei

$$J_{a_j,b_j} = (-\infty, \infty), (-\infty, b_j), (-\infty, b_j], (a_j, \infty), [a_j, \infty), (a_j, b_j), (a_j, b_j], [a_j, b_j), [a_j, b_j] \text{ mit } a_j \le b_j$$

Es gilt $\mathcal{C}J = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists j \in \{1,\dots,n\} : x_j \notin J_{a_j,b_j} \}$

Wir nehmen im Folgenden an, dass alle Intervalle J_{a_j,b_j} endlich sind. Der Fall mit $a_j = -\infty$ bzw. $b_j = \infty$ ist analog.

Für $j = 1,\dots,n$ definiere

$$J_j^1 := \begin{cases} (-\infty, a_j) & \text{falls } a_j \in J_{a_j,b_j} \\ (-\infty, a_j] & \text{falls } a_j \notin J_{a_j,b_j} \end{cases}$$

$$J_j^2 := J_{a_j,b_j}$$

$$J_j^3 := \begin{cases} (b_j, \infty) & \text{falls } b_j \in J_{a_j,b_j} \\ [b_j, \infty) & \text{falls } b_j \notin J_{a_j,b_j} \end{cases}$$

und für $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \{1,2,3\}^n$ setze

$$J_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} := \bigtimes_{j=1}^{n} J_j^{\varepsilon_j} \quad \text{(kartesisches Produkt)}$$

Dann gilt

$$\mathcal{C}J = \bigcup_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{1,2,3\}^n \\ \exists j\in\{1,\dots,n\}:\, \varepsilon_j \neq 2}} J_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$$

und diese Vereinigung ist eine disjunkte von Elementen aus $\overline{\mathcal{J}}$. Damit ist (*) gezeigt.

Mit (1) gilt also

$$\mathcal{C}A = \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{C}J_j = \bigcap_{j=1}^{k} \bigcup_{m=1}^{N(j)} J_{j,m}$$

$J_{j,m}$ stellen eine disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\overline{\mathcal{J}}$ der Menge $\mathcal{C}J_j$ dar

$$= \bigcup_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k) \\ \forall j=1,\dots,k:\, \varepsilon_j\in\{1,\dots,N(j)\}}} \bigcap_{j=1}^{k} J_{j,\varepsilon_j}$$

Dies stellt eine disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\overline{\mathcal{J}}$ dar [Bedenke, dass endliche Schnitte von Elementen aus $\overline{\mathcal{J}}$ wieder ein Element aus $\overline{\mathcal{J}}$ sind.]

Damit ist "$A\in\overline{\mathcal{E}} \Rightarrow \mathcal{C}A\in\overline{\mathcal{E}}$" gezeigt.

(iii) Zeige nun: Seien $A=\bigcup_{k=1}^{N} J_k$, $B=\bigcup_{\ell=1}^{M} J_\ell \in \overline{\mathcal{E}}$ unlässige Darstellungen durch Vereinigung disjunkter Elemente aus $\overline{\mathcal{J}}$. Dann gilt $A\cup B\in\overline{\mathcal{E}}$.

Bew.

Definiere für $k\in\{1,\dots,N\}$, $\ell\in\{1,\dots,M\}$

$$K_{k,\ell} := J_k \cap J_\ell \in \overline{\mathcal{J}},$$

für $k\in\{1,\dots,N\}$ $\tilde{J}_k := J_k \setminus \bigcup_{\ell=1}^{M} J_\ell$

für $\ell\in\{1,\dots,M\}$ $\tilde{J}_\ell := J_\ell \setminus \bigcup_{k=1}^{N} J_k$

Dann gilt offenbar

$$A \cup B = \bigcup_{\substack{k=1,\dots,N \\ \ell=1,\dots,M}} K_{k,\ell} \cup \bigcup_{k=1,\dots,N} \tilde{J}_k \cup \bigcup_{\ell=1}^{M} \tilde{J}_\ell \qquad (*)$$

Desweiteren sind die $K_{k,\ell} \in \overline{\mathcal{J}}$,
für $k \in \{1,\dots,N\}$ gilt

$$(**) \quad \tilde{J}_k = J_k \setminus \bigcup_{\ell=1}^{M} J_\ell = J_k \cap \complement\Big(\bigcup_{\ell=1}^{M} J_\ell\Big) = J_k \cap \bigcap_{\ell=1}^{M} \underbrace{\complement J_\ell}_{\in \overline{\mathcal{E}} \text{ nach (ii)}} \in \overline{\mathcal{E}}$$

Ebenso sieht man für $\ell \in \{1,\dots,M\}$

$$(***) \quad \tilde{J}_\ell \in \overline{\mathcal{E}}$$

Außerdem ist die Vereinigung $(*)$ eine disjunkte

Wegen $(**)$ und $(***)$ ist die Vereinigung $(*)$ eine Vereinigung von disjunkten Elementen aus $\overline{\mathcal{J}}$ wie gewünscht, was $A \cup B \in \overline{\mathcal{E}}$ zeigt. Insgesamt ist damit gezeigt, daß $\overline{\mathcal{E}}$ eine Algebra ist.

2) z.z.: Es gilt $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{J}}) = \mathcal{A}(\mathcal{J})$.

Wegen $\mathcal{J} \subseteq \overline{\mathcal{J}}$ folgt unmittelbar $\mathcal{A}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{A}(\overline{\mathcal{J}})$

Zeige nun: $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{J}}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{J})$. Dazu genügt es zu zeigen:

$$\forall J \in \overline{\mathcal{J}} : J \in \mathcal{A}(\mathcal{J})$$

Sei also $J := \bigtimes_{j=1}^{n} J_{a_j,b_j} \in \overline{\mathcal{J}}$

Für $N \in \mathbb{N}$ definiere

$$J^N := \bigtimes_{j=1}^{n} \tilde{J}^N_{a_j,b_j}$$

wobei

$$\tilde{J}^N_{a_j,b_j} := \begin{cases} J_{a_j,b_j} & \text{falls } -\infty < a_j \wedge b_j < \infty \\ J_{-N,b_j} & \text{falls } -\infty = a_j \wedge b_j < \infty \\ J_{a_j,N} & \text{falls } -\infty < a_j \wedge b_j = \infty \\ J_{-N,N} & \text{falls } -\infty = a_j \wedge b_j = \infty \end{cases}, \quad j = 1,\dots,n$$

Dann gilt $J^N \in \mathcal{J}$ f.a. $N \in \mathbb{N}$ und zudem

$$J = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} J^N \in \mathcal{A}(\mathcal{J}), \quad \text{q.e.d.}$$